Über zweidimensionale normale Singularitäten

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg - August - Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Karl Graf Finck von Finckenstein
aus Berum, Kreis Norden

Göttingen 1966

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544307_0047

Über zweidimensionale normale Singularitäten

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg - August - Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Karl Graf Finck von Finckenstein
aus Berum, Kreis Norden

Göttingen 1966

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

Referent: Professor Dr. H. Grauert

Korreferent: Professor Dr. R. Remmert

Tag der mündlichen Prüfung: 1o.11. 1966.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung . . . . . S. 1

§ 1. Begriff der rationalen Singularität .. S. 3

§ 2. Präfaktorielle und faktorielle Ringe .. S. 6

§ 3. Beweis des ersten Teilergebnisses ..... S. 8

§ 4. Hilfssätze aus der Matrizentheorie und Begriff des Schnittbetrages . . . . S. 16

§ 5. Topologische Hilfssätze . . . . . S. 22

§ 6. Beweis des zweiten Teilergebnisses . .. S. 32

§ 7. Beweis des Hauptsatzes . . . . . S. 36

§ 8. Gesamtergebnis . . . . . S. 41

Literaturverzeichnis . . . . . S. 43

Lebenslauf . . . . . S. 45

EINLEITUNG

Es ist seit langem bekannt, dass sich die Singularitäten 2-dimensionaler normaler komplexer Räume auflösen lassen. Dabei heisst ein Punkt p eines komplexen Raumes Y eine Singularität (oder ein nichtgewöhnlicher Punkt), wenn der lokale Ring $\mathcal{O}_p$ der Strukturgarbe $\mathcal{O}$ von Y ein nichtregulärer Ring ist. Sei mit S die Singularitätenmenge von Y bezeichnet. In 2-dimensionalen normalen komplexen Räumen treten als Singularitäten höchstens isolierte Punkte auf, da in normalen komplexen Räumen S eine höchstens 2-codimensionale analytische Menge bildet. Eine Auflösung der Singularitäten eines solchen 2-dimensionalen normalen komplexen Raumes Y nun besteht aus einer 2-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit X und einer eigentlichen, holomorphen Abbildung ϕ von X auf Y, wobei $\phi \mid X - \phi^{-1}(S)$ biholomorph ist. $\phi^{-1}(S)$ heisst Ausnahmemenge von ϕ und ist eine 1-dimensionale analytische Menge in X. X nennt man lokale kompakte Modifikation von Y. In [9] hat F. Hirzebruch im Jahre 1953 eine Methode angegeben, die es gestattet, die Auflösung 2-dimensionaler normaler Singularitäten an Hand konkreter Beispiele explizit durchzuführen.

In der vorliegenden Arbeit wird die algebraische Struktur der lokalen Ringe $\mathcal{O}_p$ über 2-dimensionalen normalen Singularitäten p näher untersucht. Es erhebt sich zum Beispiel die Frage, wann solche Ringe faktoriell, d.h. Ringe mit eindeutiger Primfaktorzerlegung sind. Ein Beispiel eines nichtregulären 2-dimensionalen normalen algebroiden Ringes, der faktoriell ist, wurde 1961 von D. Mumford angegeben. (vgl. [15]). Es ist dies der Ring $\mathbb{C}\langle\langle z_1, z_2, z_3\rangle\rangle / (z_1^2 + z_2^3 + z_3^5)$. Jedoch scheinen derartige Beispiele nicht allzu häufig zu sein.

Es erweist sich nun als zweckmässig, Ringe zu betrachten, die eine etwas schwächere Eigenschaft, als die ZPE-Eigenschaft besitzen, nämlich die sogenannten präfaktoriellen Ringe.

Das sind genau diejenigen Ringe $\mathcal{O}_p$, in denen es zu jedem 1-codimensionalen analytischen Primkeim A_p einen holomorphen Funktionskeim $f_p \in \mathcal{O}_p$ gibt, der A_p als genauen Nullstellenkeim besitzt.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass diejenigen Singularitäten, die solche präfaktoriellen lokalen Ringe besitzen, genau die sogenannten rationalen Singularitäten sind. $p \in Y$ heisst Singularität, wenn für die Ausnahmemenge $K := \phi^{-1}(p) \subset X$ gilt: $H^1(K, \mathcal{H}) = 0$. $\mathcal{H}$ ist dabei die Strukturgarbe von X. Diese Definition ist bekanntlich unabhängig von der speziellen Auflösung von p (vgl. [2]). Weiter zeigt sich, dass aus der Eigenschaft "rational" folgt, dass K ein sogenannter Sphärenbaum ist, d.h. sämtliche irreduzible Komponenten von K haben das Geschlecht Null und bilden bezüglich der Relation "sich schneiden" keinen Zyklus. Jedoch ist diese Bedingung nicht hinreichend; in § 6 dieser Arbeit wird unter einer zusätzlichen Voraussetzung, die an den Sphärenbaum K gestellt wird, gezeigt, dass p rational ist.

Dass sich bei der Auflösung einer 2-dimensionalen normalen Singularität p im allgemeinen keineswegs nur Bäume bzw. kompakte Flächen vom Geschlecht Null als Ausnahmemengen ergeben, lässt sich an Beispielen zeigen. Die lokalen Ringe solcher Singularitäten sind natürlich nicht präfaktoriell. Beispiele nichtregulärer 2-dimensionaler normaler algebroider Ringe, die präfaktoriell sind, sind hinreichend viele bekannt (vgl. z.B. [9] und [11]). Bei den faktoriellen Ringen $\mathcal{O}_p$ kommt dann noch zusätzlich eine besondere Eigenschaft der Schnittmatrix $(c_{\nu\mu})$ der Ausnahmemenge $\phi^{-1}(p)$ hinzu, nämlich die Unimodularität von $(c_{\nu\mu})$.

Herrn Professor Grauert möchte ich an dieser Stelle für die Anregung zu dieser Arbeit und ihre Förderung herzlich danken.

rationale

§ 1. Begriff der rationalen Singularität.

Sei $(Y,\mathcal{O})$ ein 2-dimensionaler normaler Stein'scher Raum mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}$, $p \in Y$ sei ein nichtgewöhnlicher Punkt von Y. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass p die einzige Singularität von Y ist. Bekanntlich gilt (vgl. [9]):

Satz 1.1: Zu $(Y,\mathcal{O})$ existiert eine 2-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit $(X,\mathcal{H})$ und eine eigentliche, surjektive, holomorphe Abbildung $\phi : (X,\mathcal{H}) \to (Y,\mathcal{O})$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $\phi \mid X - \phi^{-1}(p) : X - \phi^{-1}(p) \to Y - \{p\}$ ist eine biholomorphe Abbildung.

2) Die Ausnahmemenge von ϕ, $K := \phi^{-1}(p) \subset X$, ist Vereinigungsmenge endlich vieler kompakter, irreduzibler 1-dimensionaler in X analytischer Mengen $K_\nu (\nu = 1,\ldots,n)$. Je zwei der K_ν sind entweder disjunkt, oder schneiden sich in endlich vielen isolierten Punkten. K ist zusammenhängend.

K heisst exzeptionell. Die Schnittmatrix von K ist wohldefiniert und ist nach einem Satz von H. Grauert negativ definit (vgl. [6]). Die komplexe Mannigfaltigkeit $(X,\mathcal{H})$ wird eine Auflösung von $(Y,\mathcal{O})$ oder auch eine Auflösung der Singularität p genannt.

Bläst man successiv alle diejenigen K_ν von K, welche singularitätenfreie Sphären mit Selbstschnitt - 1 (Hopf'sche Sphären) sind, zu Punkten zusammen, so entsteht aus $(X,\mathcal{H})$ eine 2-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{H}})$ mit der Ausnahmemenge $\tilde{K}$. $\tilde{K}$ besitzt also keine singularitätenfreien Sphären mit Selbstschnittzahl - 1 mehr (vgl. [4], [9], und [10]). $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{H}})$ hat wieder die Eigenschaften von Satz 1.1 und wird minimale Auflösung von $(Y,\mathcal{O})$ genannt. In [4], Seite 81, wird bewiesen, dass die minimale Auflösung eines 2-dimensionalen normalen komplexen Raumes (bis auf

Biholomorphie) eindeutig bestimmt ist.

Def. 1.1: Sei $(X,\mathcal{H})$ eine Auflösung von $(Y,\mathcal{J})$, und sei K die Ausnahmemenge mit den irreduziblen Komponenten $K_1,\ldots,K_n$. K heisst ein Baum, wenn unter den $K_1,\ldots,K_n$ bezüglich der Relation "sich schneiden" kein Zyklus auftritt, genauer, wenn es unter den $K_1,\ldots,K_n$ kein Teilsystem $K_{\nu_1},\ldots,K_{\nu_r}$ $(r \geq 2)$ gibt mit der Eigenschaft, dass K_{ν_i} und $K_{\nu_{i+1}}$ sich in einem Punkte $q_{\nu_i,\nu_{i+1}}$ $(i = 1,\ldots,r-1)$ sowie K_{ν_r} und K_{ν_1} sich in einem Punkte q_{ν_r,ν_1} schneiden und alle diese Schnittpunkte paarweise voneinander verschieden sind. Haben überdies alle K_ν das Geschlecht Null, so heisst K ein Sphärenbaum.

Man erhält nun umgekehrt eine beliebige Auflösung $(X,\mathcal{H})$ von $(Y,\mathcal{J})$ aus der minimalen Auflösung $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{H}})$ durch successives Einsetzen endlich vieler Hopf'scher Sphärenbäume in Punkte der Ausnahmemenge $\tilde{K}$ von $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{H}})$. (Das Einsetzen dieser Sphärenbäume bezeichnet man auch als σ-Prozesse). Dies folgt aus einem Satz von Hopf, der besagt, dass die einzigen lokalen kompakten Modifikationen 2-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten diese iterierten σ-Prozesse sind (vgl. [1o]).

Man überlegt sich sofort folgendes:

> Die Ausnahmemenge K einer beliebigen Auflösung $(X,\mathcal{H})$ von $(Y,\mathcal{J})$ ist genau dann ein Baum (Sphärenbaum), wenn die Ausnahmemenge $\tilde{K}$ der minimalen Auflösung $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{H}})$ von $(Y,\mathcal{J})$ ein Baum (Sphärenbaum) ist.

Sei nun $q \in K$ ein nichtgewöhnlicher Punkt der Ausnahmemenge K einer Auflösung $(X,\mathcal{H})$ von $(Y,\mathcal{J})$, und sei $U = U(q) \subset X$ eine Umgebung, in der q der einzige nichtgewöhnliche Punkt von $K \cap U$ ist. In [9], § 2, Seite 11 wird gezeigt:

> In q lässt sich ein Hopf'scher Sphärenbaum $t^{-1}(q)$ so einsetzen, dass $t^{-1}(K \cap U)$ in $t^{-1}(U)$ nur aus gewöhnlichen Punkten und bestimmten Doppelpunkten besteht. (Zur Definition des bestimmten Doppelpunktes vgl. [9], 2.9).

Infolgedessen kann Satz 1.1 verschärft werden zu folgendem Satz:

Satz 1.2: Zu $(Y, \mathfrak{Y})$ existiert eine Auflösung $(X, \mathcal{H})$, so dass für die Ausnahmemenge $K \subset X$ folgendes gilt: K ist Vereinigungsmenge endlich vieler kompakter, irreduzibler, 1-dimensionaler in X analytischer Mengen K_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$. Jedes K_ν ist singularitätenfrei in X eingebettet. Je zwei K_ν sind entweder disjunkt, oder schneiden sich in genau einem Punkte transversal. Ein solcher Schnittpunkt gehört nur zweien der K_ν an. Überdies ist K zusammenhängend.

Wir definieren nun:

Def. 1.2: Sei $(Y, \mathfrak{Y})$ ein 2-dimensionaler, normaler komplexer Raum, $p \in Y$ sei o.B.d.A. der einzige nichtgewöhnliche Punkt von Y. $(X, \mathcal{H})$ sei eine beliebige Auflösung von p mit den Eigenschaften von Satz 1.2... p heisst rationale Singularität, wenn für die Ausnahmemenge $K \subset X$ gilt: $H^1(K, \mathcal{H}) = 0$.

Durch leichte Überlegungen ergibt sich folgender Satz:

Satz 1.3: Sei $U = U(p) \subset Y$ eine Umgebung von p und sei $V := V(K) = \phi^{-1}(U) \subset X$. Den eindimensionalen durch p laufenden in U analytischen Mengen $\tilde{A}$, die in jedem Punkt von U, sowie in U irreduzibel sind, entsprechen umkehrbar eindeutig die eindimensionalen in V analytischen Mengen A, welche K in genau einem Punkt x_o schneiden und in jedem Punkte von V, sowie in V irreduzibel sind.

§ 2. Präfaktorielle und faktorielle Ringe.

Sei R ein noetherscher Integritätsring. Nach einem bekannten Satz von Krull ist R genau dann ein Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung, wenn jedes minimale Primideal von R [d.h. jedes Primideal der Höhe 1] ein Hauptideal ist. Solche Ringe heissen auch faktoriell.

Def. 2.1: Sei R ein normaler noetherscher Integritätsring. R heisst präfaktoriell, wenn es zu jedem minimalen Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ ein $n \geq 1$ gibt, so dass die n-te symbolische Potenz von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}^{(n)} \subset R$, ein Hauptideal ist.

Anmerkung: Diese Definition habe ich der Arbeit [11] entnommen.

Def. 2.2: Sei $\mathcal{O}_p$ wie in § 1 definiert, A_p sei ein 1-dimensionaler analytischer Primkeim in p, $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_p$ sei das zu A_p gehörige minimale Primideal und sei $f_p \in \mathcal{O}_p$ ein Keim. Wir sagen, f_p verschwindet auf A_p von der Ordnung n, wenn gilt: $f_p \in \mathfrak{p}^{(n)}$, aber $f_p \notin \mathfrak{p}^{(n+1)}$.

Es gilt:

Satz 2.1: Folgende Aussagen über den lokalen Ring $\mathcal{O}_p$ von § 1 sind äquivalent:

(i) $\mathcal{O}_p$ ist präfaktoriell

(ii) Zu jedem 1-dimensionalen analytischen Primkeim A_p existiert ein holomorpher Funktionskeim $f_p \in \mathcal{O}_p$ mit:

$$A_p = \{ f_p = 0 \}$$

Anmerkung: Steht in (i) "faktoriell" statt präfaktoriell, so muss in (ii) zusätzlich hinzugefügt werden: "f_p verschwindet auf A_p von erster Ordnung".

Beweis: (i) => (ii): Den minimalen Primidealen von $\mathcal{O}_p$ entsprechen umkehrbar eindeutig die eindimensionalen analytischen Primkeime im Punkte p. Sei $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_p$ ein minimales Primideal. Dann existiert nach Voraussetzung ein $n \geq 1$ mit

$(f_p) = \mathfrak{p}^{(n)}$ für ein geeignetes $f_p \in \mathcal{O}_p$. Da $\mathfrak{r}(\mathfrak{p}^{(n)}) = \mathfrak{p}$ ist, besitzen $\mathfrak{p}^{(n)}$ und $\mathfrak{p}$ den gleichen Nullstellenkeim A_p. Also verschwindet f_p genau auf A_p. Für n = 1 folgt die Gültigkeit der Anmerkung.

(ii) => (i): Sei A_p ein eindimensionaler analytischer Primkeim in p und sei $\mathfrak{p} \in \mathcal{O}_p$ das zugehörige minimale Primideal. Da $\mathcal{O}_p$ normal ist, ist auch die Lokalisierung $\mathcal{O}_{p\mathfrak{p}}$ normal. Ausserdem folgt wegen: $\dim \mathcal{O}_{p\mathfrak{p}} = \dim_p Y - \dim_p A$ (vgl. [1]):

$$\dim \mathcal{O}_{p\mathfrak{p}} = 1. \qquad (1)$$

Da $\mathcal{O}_{p\mathfrak{p}}$ normal ist, folgt, dass $\mathcal{O}_{p\mathfrak{p}}$ regulär ist. Folglich ist jedes von Null verschiedene Ideal von $\mathcal{O}_{p\mathfrak{p}}$ eine gewisse Potenz des maximalen Ideals $\mathfrak{p} \cdot \mathcal{O}_{p\mathfrak{p}}$. [vgl. Northcott, Ideal Theory].

Möge nun f_p auf A_p von der Ordnung $n \geq 1$ verschwinden. Nach Def. 2.2 ist $\mathfrak{p}^{(n)} = (\mathfrak{p}^n \cdot \mathcal{O}_{p\mathfrak{p}}) \cap \mathcal{O}_p$ die Gesamtheit aller auf A_p von mindestens n-ter Ordnung verschwindenden holomorphen Funktionskeime von $\mathcal{O}_p$. Es folgt: $(f_p) \subset \mathfrak{p}^{(n)}$. Wir behaupten: $(f_p) = \mathfrak{p}^{(n)}$. Sei $g_p \in \mathcal{O}_p$ ein Keim, der von mindestens n-ter Ordnung auf A_p verschwindet. Wir fassen f_p und g_p als Elemente in $\mathcal{O}_{p\mathfrak{p}}$ auf. Das Ideal $\mathfrak{p}^n \cdot \mathcal{O}_{p\mathfrak{p}} = (f_p) \cdot \mathcal{O}_{p\mathfrak{p}}$ ist die n-te Potenz des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{p\mathfrak{p}}$. Also gilt: $g_p \in (f_p) \cdot \mathcal{O}_{p\mathfrak{p}}$. g_p besitzt in $\mathcal{O}_{p\mathfrak{p}}$ eine Zerlegung:

$$g_p = h \cdot f_p \qquad (2)$$

$h \in \mathcal{O}_{p\mathfrak{p}}$ ist ein meromorpher Funktionskeim, der nur ausserhalb von A_p Polstellenflächen aufweisen kann. Da aber f_p ausserhalb von A_p nirgends verschwindet, folgt, dass h holomorpher Funktionskeim ist. Also gilt die Zerlegung (2) sogar in $\mathcal{O}_p$. Somit folgt: $(f_p) = \mathfrak{p}^{(n)}$, q.e.d.

Mit Hilfe von Satz 1.3 folgt nun aus Satz 2.1 unmittelbar:

Satz 2.2: Folgende Aussagen über den Ring $\mathcal{O}_p$ von § 1 sind äquivalent:

(i) $\mathcal{O}_p$ ist präfaktoriell

(ii) Zu jeder in einer (geeigneten) Umgebung $V = V(K) \subset X$ 1-dimensionalen analytischen Menge A, welche K in genau einem Punkte x_o schneidet und in jedem Punkte von V, sowie in V irreduzibel ist, existiert eine in V holomorphe Funktion f mit:

$$\{f = 0\} = (K \cup A) \cap V .$$

Anmerkung: Steht in (i) "faktoriell" statt präfaktoriell, so muss in (ii) zusätzlich hinzugefügt werden: "f verschwindet auf $A \cap V$ von erster Ordnung".

§ 3. Beweis des ersten Teilergebnisses.

Seien dieselben Bezeichnungen wie in den vorigen Paragraphen gewählt. Wir beweisen nun folgenden Satz:

Satz 3.1: Sei $\mathcal{O}_p$ präfaktoriell. Dann ist K ein Sphärenbaum.

Beweis: Nach Satz 1.3 entsprechen den 1-dimensionalen analytischen Primkeimen $\tilde{A}_p$ im Punkte $p \in Y$ umkehrbar eindeutig die 1-dimensionalen, jeweils in geeigneten Umgebungen $V = V(K) \subset X$ analytischen Mengen A, welche K in genau einem Punkte x_o schneiden und in jedem Punkt von V, sowie in V irreduzibel sind.

Sei $K = \bigcup_{\nu=1}^{n} K_\nu$, wobei $K_1, \ldots, K_n$ die irreduziblen Komponenten von K seien. Wir betrachten eine beliebige irreduzible Komponente, die wir o.B.d.A. mit K_1 bezeichnen. Die durch K_1 laufenden irreduziblen Komponenten von K seien mit $K_2, \ldots, K_k$, ihre Schnittpunkte mit K_1 seien mit $q_2, \ldots, q_k$ bezeichnet. K erfülle die Voraussetzungen von Satz 1.2.

Sei $x_0 \in K_1$ ein Punkt, und sei A eine 1-dimensionale gewöhnliche analytische Menge, die K_1 in x_0 transversal schneidet und sonst K nirgends trifft. Nach Voraussetzung und infolge von Satz 2.2 gibt es eine Umgebung $V = V(K)$ und eine in V holomorphe Funktion f, die genau auf $K \cup A$ verschwindet. Möge f auf A von der Ordnung d und auf den K_ν von den Ordnungen r_ν ($\nu = 1,\ldots,n$) verschwinden. Wir ordnen nun dem Punkte $x_0 \in K_1$ das geordnete (n+1)-Tupel natürlicher Zahlen $(d,r_1,\ldots,r_n)$ zu. Die gleichen Überlegungen lassen sich für einen beliebigen anderen Punkt $x_1 \in K_1$ durchführen.

Durchläuft x_0 alle Punkte von K_1, so erhalten wir eine Abbildung χ von K_1 in die Menge M der geordneten (n+1) - Tupel natürlicher Zahlen. Da M abzählbar ist, K_1 überabzählbar, folgt, dass χ nicht injektiv ist.
Seien also x_0, x_1 zwei verschiedene Punkte von K_1 mit:

$$\chi(x_0) = \chi(x_1) = (d,r_1,\ldots,r_n)$$

(Wir können ausserdem annehmen, dass $\chi^{-1}[(d,r_1,\ldots,r_n)]$ aus überabzählbar vielen Punkten von K_1 besteht).

Weiter seien A und B die entsprechenden durch x_0 bzw. x_1 verlaufenden und K_1 transversal schneidenden analytischen Mengen, und seien f und g die zugehörigen in einer Umgebung $V = V(K)$ holomorphen Funktionen. In V gilt:

$$\{f = 0\} = A \cup K \qquad \{g = 0\} = B \cup K \tag{1}$$

f und g verschwinden beide auf $K_1,\ldots,K_n$ jeweils von den Ordnungen $r_1,\ldots r_n$. f verschwindet auf A von der Ordnung d, und g verschwindet auf B ebenfalls von der Ordnung d.

Seien $\mathfrak{k}_1,\ldots,\mathfrak{k}_n, \mathfrak{a}$ die Idealgarben der $K_1,\ldots,K_n,A$ über V. Wir setzen:

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{k}_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{k}_n^{r_n} \cdot \mathfrak{a}^{d-1} \tag{2}$$

$\mathfrak{m} \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}|V$ ist eine kohärente $\mathcal{H}$-Garbe über V, deren Nullstellenmenge $(\bigcup_{\nu=1}^{n} K_\nu \cup A) \cap V$ ist. Für d = 1 ist die Nullstellenmenge $(\bigcup_{\nu=1}^{n} K_\nu) \cap V$. Für jeden Punkt $x \in V$ ist $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{H}_x$

Hauptideal. Wegen der Kohärenz von $\mathfrak{m}$ existiert eine Umgebung $W = W(x)$ und ein Schnitt $h \in \Gamma(W, \mathcal{H})$, der in jedem Punkte $y \in W$ den Halm $\mathfrak{m}_y$ erzeugt. Also gilt:

$$\mathfrak{m}_y = (h_y) \qquad \text{für } y \in W.$$

Wir wählen nun in der oben angegebenen Weise ein System von Paaren $\{(W_i, h_i)\}_{i \in I}$ derart, dass die W_i V überdecken, die h_i holomorph in W_i sind und in jedem $y \in W_i$ den Halm $\mathfrak{m}_y$ erzeugen. Das System $\{(W_i, h_i)\}_{i \in I}$ definiert einen über V holomorphen Divisor ϑ, der genau das komplex-analytische Geradenbündel

$$m := (K_1)^{r_1} \otimes \ldots \otimes (K_n)^{r_n} \otimes (A)^{d-1} \qquad (3)$$

über V erzeugt.

Wir betrachten nun die über V holomorphe Funktion f. Es gilt: $f \in \Gamma(V, \mathfrak{m})$. Für ein beliebiges $x \in V$ lässt sich der Keim f_x schreiben in der Form:

$$f_x = l_x \cdot h_x \qquad (4)$$

Dabei ist h_x erzeugendes Element von $\mathfrak{m}_x$ und $l_x \in \mathcal{H}_x$ ist eindeutig durch f_x bestimmt. Es sei z die laufende komplexe Koordinate der Faser $\mathbb{C}^1$ des Bündels m. Wir setzen:

$$\hat{f}_x := z \cdot l_x \qquad (5)$$

$\hat{f}_x$ ist der Keim einer in m holomorphen Funktion $\hat{f}$, die entlang den Fasern über den Punkten x von V im Bündel m eine Linearform definiert. Die Verträglichkeit des so konstruierten $\hat{f}$ mit der Bündelstruktur von m sieht man folgendermassen ein: Sei $x \in W_i \cap W_j$, dann gilt in m folgende Verheftungsabbildung:

$$W_j \times \mathbb{C}^1 \ni (x,z) \longleftrightarrow (x,\ h_i \cdot h_j^{-1}(x) \cdot z) \in W_i \times \mathbb{C}^1 \qquad (6)$$

Nun gilt:

in W_i: $f = l_i \cdot h_i$ mit in W_i holomorphen l_i

in W_j: $f = l_j \cdot h_j$ mit in W_j holomorphen l_j

Es folgt:

$$h_i \cdot h_j^{-1}(x) = l_j \cdot l_i^{-1}(x) \qquad \forall\, x \in W_i \cap W_j \qquad (7)$$

Für die Linearform $\hat{f}(x)$ gilt:

in $W_j \times \mathbb{C}^1$: $\hat{f}$: $(x,z) \quad \longrightarrow \quad (x, z \cdot l_j(x))$

in $W_i \times \mathbb{C}^1$: $\hat{f}$: $(x, h_i h_j^{-1}(x) \cdot z) \longrightarrow (x, [h_i h_j^{-1}(x) \cdot z] \cdot l_i(x))$

also wegen (7):

in $W_i \times \mathbb{C}^1$: $\hat{f}$: $(x, h_i h_j^{-1}(x) \cdot z) \longrightarrow (x, z \cdot l_j(x))$

Folglich können wir $\hat{f}$ als holomorphe Schnittfläche in dem zu m dualen Bündel m^{-1} auffassen.

Der globale holomorphe Divisor f erzeugt über V das komplex-analytische Geradenbündel $(K_1)^{r_1} \otimes \ldots \otimes (K_n)^{r_n} \otimes (A)^d$, welches dem trivialen Geradenbündel analytisch isomorph ist. Zu der auf V holomorphen Funktion g gehört das Geradenbündel $(K_1)^{r_1} \otimes \ldots \otimes (K_n)^{r_n} \otimes (B)^d$, welches dem trivialen Geradenbündel ebenfalls analytisch isomorph ist. Also folgt:

$$(K_1)^{r_1} \otimes \ldots \otimes (K_n)^{r_n} \otimes (A)^d \cong (K_1)^{r_1} \otimes \ldots \otimes (K_n)^{r_n} \otimes (B)^d$$

also

$$(A)^d \cong (B)^d \qquad (8)$$

Wir setzen jetzt: $(x_o)^d := (A)^d | K_1$, $(x_1)^d := (B)^d | K_1$.

Es folgt aus (8):

$$(x_o)^d \cong (x_1)^d \qquad (9)$$

Wir behaupten nun, dass es zwei verschiedene Punkte $\xi, \eta \in \chi^{-1}[(d,r_1,\ldots,r_n)]$ gibt mit der Eigenschaft: $(\xi) \cong (\eta)$. Nehmen wir an, es gäbe zwei solche Punkte nicht. Es ist dann natürlich zunächst $d > 1$. Wir betrachten einen festen Punkt $\xi_o \in \chi^{-1}[(d,r_1,\ldots,r_n)]$ und bilden die Geradenbündel der Form $(\xi_o) \otimes (\eta)^{-1}$, wobei η alle Punkte aus $\chi^{-1}[(d,r_1,\ldots,r_n)]$ durchläuft. Diese Bündel müssten nach der Annahme alle paarweise verschieden sein, denn aus

$(\xi_o) \otimes (\eta_1)^{-1} \cong (\xi_o) \otimes (\eta_2)^{-1}$ mit $\eta_1 \neq \eta_2$ würde folgen: $(\eta_1) \cong (\eta_2)$, was unserer Annahme widerspräche. Die d-ten Tensorpotenzen dieser Bündel sind alle trivial. Da $\chi^{-1}[(d,r_1,\ldots,r_n)]$ überabzählbar vorausgesetzt war, würde nun folgen, dass der Modul der komplex-analytischen Geradenbündel über K_1 überabzählbar viele Torsionselemente besitzen würde.

Es bezeichne $\mathcal{K}/_i$ die Strukturgarbe von K_1 und $\mathcal{K}^*/_{i^*}$ die multiplikative Garbe der Keime nirgends verschwindender holomorpher Funktionen über K_1. Es folgt dann wegen der Exaktheit der Sequenz:

$$0 \to H^1(K_1,Z) \to H^1(K_1, \mathcal{K}/_i) \to H^1(K_1, \mathcal{K}^*/_{i^*} \to H^2(K_1,Z) \to 0$$

die Beziehung:

$$H^1(K_1, \mathcal{K}^*/_{i^*}) \cong \frac{H^1(K_1, \mathcal{K}/_i)}{\underbrace{Z \oplus \ldots \oplus Z}_{2p \text{ - mal}}} \oplus Z$$

wobei mit p das Geschlecht von K_1 bezeichnet ist. Nun ist $H^1(K_1, \mathcal{K}/_i)$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum (vgl. [12], Theorem V), sagen wir, von der Dimension r. Die Elemente von $H^1(K_1, \mathcal{K}/_i)$ lassen sich daher als reelle 2r-Tupel schreiben. Torsionselemente von $H^1(K_1, \mathcal{K}^*/_{i^*})$ können natürlich nur in dem Summanden $\frac{H^1(K_1, \mathcal{K}/_i)}{Z \oplus \ldots \oplus Z}$ auftraten.

Wir sehen aber sofort, dass höchstens rationale 2r-Tupel von $H^1(K_1, \mathcal{K}/_i)$ Torsionselemente repräsentieren können; da jene aber eine abzählbare Menge bilden, folgt ein Widerspruch. Folglich existieren doch zwei Punkte $\xi, \eta \in \chi^{-1}[(d,r_1,\ldots,r_n)]$ mit der obigen Eigenschaft, und wir können o.B.d.A. annehmen, dass x_o und x_1 zwei solche Punkte sind. Wir erhalten also aus (9):

$$(x_o) \cong (x_1) \qquad (10)$$

Mit $F := m^{-1}|K_1$ folgt nun aus (3) und (1o):

$$F \cong (x_1) \qquad (11)$$

Die Beschränkung der in m^{-1} holomorphen Schnittfläche $\hat{f}$ auf F sei mit s_o bezeichnet. Durch (11) ist eine fasertreue biholomorphe Abbildung von F auf (x_1) gegeben. Das Bild von s_o im Bündel (x_1) sei s. Wie man aus der Konstruktion von s ersieht, ist s eine holomorphe Schnittfläche in dem Bündel (x_1), die nur über dem Punkte x_o verschwindet und sonst überall in (x_1) von Null verschieden ist.

Sei $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in J}$ ein über der kompakten Riemann'schen Fläche K_1 holomorpher Divisor, von dem das Geradenbündel (x_1) herkommt. s kann dann aufgefasst werden als in den U_i holomorphe Funktionen s_i, für die in $U_i \cap U_j$ gilt:

$$s_i = \varphi_i \varphi_j^{-1} \cdot s_j \qquad (12)$$

Wir bilden jetzt die in den U_i meromorphen Funktionen $s_i \cdot \varphi_i^{-1}$, die wegen (12) eine über ganz K_1 meromorphe Funktion ψ bilden. ψ besitzt in x_1 einen Pol 1. Ordnung und hat sonst nirgends Pole. In x_o hat ψ eine Nullstelle 1. Ordnung und sonst keine weiteren Nullstellen. Nach einem bekannten Satz der Funktionentheorie nimmt also ψ jeden komplexen Wert auf K_1 genau einmal an, d.h. ψ vermittelt eine biholomorphe Abbildung von K_1 auf die Riemann'sche Zahlenkugel: $K_1 \approx P^1$. Da sich diese Betrachtungen für jede irreduzible Komponente von K durchführen lassen, folgt:

$$K_\nu \approx P^1 \quad \text{für } \nu = 1,\ldots,n \qquad (13)$$

Zu zeigen bleibt noch, dass K ein Baum ist. Wir nehmen an, K sei kein Baum. Nach (eventueller) Umbenennung der Indizes gibt es dann Sphären $K_1,\ldots,K_k (k \geq 2)$, die bezüglich der Relation "sich schneiden" einen Zyklus bilden (vgl. Def. 1.1). Die Schnittpunkte von K_ν mit $K_{\nu+1}$ bzw. von K_k

mit K_1 seien mit $q_{\nu,\nu+1}$ bzw. q_{k1} bezeichnet. Diese Schnittpunkte sind alle paarweise verschieden, also insbesondere gilt für die beiden Punkte q_{12}, $q_{k1} \in K_1$:

$$q_{12} \neq q_{k1} \tag{14}$$

Mit Hilfe der Mayer-Vietories Cohomologiesequenz ergibt sich:

$$H^1\left(\bigcup_1^k K_\nu, \mathcal{Z}\right) \cong \mathcal{Z}, \quad H^2\left(\bigcup_1^k K_\nu, \mathcal{Z}\right) \cong \underbrace{\mathcal{Z} \oplus \ldots \oplus \mathcal{Z}}_{k\text{-mal}}$$

Wegen der Exaktheit der Sequenz:

$$0 \to H^1\left(\bigcup_1^k K_\nu, \mathcal{Z}\right) \to H^1\left(\bigcup_1^k K_\nu, \mathcal{H}_i\right) \to H^1\left(\bigcup_1^k K_\nu, \mathcal{H}^*_{i^*}\right) \xrightarrow{\delta}$$

$$\xrightarrow{\delta} H^2\left(\bigcup_1^k K_\nu, \mathcal{Z}\right) \to \ldots$$

ergibt sich daher: $H^1\left(\bigcup_1^k K_\nu, \mathcal{H}^*_{i^*}\right) \cong \dfrac{H^1\left(\bigcup_1^k K_\nu, \mathcal{H}_i\right)}{\mathcal{Z}} \oplus \operatorname{Im}\delta$.

Der Modul $\operatorname{Im}\delta$ ist Untermodul von $H^2\left(\bigcup_1^k K_\nu, \mathcal{Z}\right) \cong \bigoplus_1^k \mathcal{Z}$ und besitzt daher keine Torsionselemente.

Durch die gleichen Überlegungen wie oben, können wir wieder Punkte $x_0, x_1 \in K_1$ und eindimensionale, gewöhnliche analytische Mengen A,B finden, die K_1 in x_0 bzw. x_1 transversal schneiden, so dass wieder gilt:

$$(A) \mid \bigcup_1^k K_\nu \cong (B) \mid \bigcup_1^k K_\nu \cong m^{-1} \mid \bigcup_1^k K_\nu \tag{15}$$

Dabei ist m^{-1} wieder wie oben definiert.

f und g seien wieder die entsprechenden in einer Umgebung V = V(K) holomorphen Funktionen, und es sei $\hat{f}$ wie oben konstruiert. $\tilde{s}_0$ sei die Beschränkung von $\hat{f}$ auf $m^{-1} \mid \bigcup_1^k K_\nu$. $\tilde{s}$ sei das vermöge (15) vermittelte Bild von

$\tilde{s}_o$ im Bündel (B) $\mid \overset{k}{\underset{1}{\cup}} K_\nu$. $\tilde{s}$ ist eine holomorphe Schnittfläche in (B) $\mid \overset{k}{\underset{1}{\cup}} K_\nu$, die über x_o verschwindet und sonst überall in (B) $\mid \overset{k}{\underset{1}{\cup}} K_\nu$ von Null verschieden ist. Durch die gleiche Konstruktion wie oben, erhalten wir eine über $\overset{k}{\underset{1}{\cup}} K_\nu$ meromorphe Funktion $\tilde{\psi}$. $\tilde{\psi}$ nimmt auf K_1 jeden komplexen Wert genau einmal an und ist auf den $K_2,\ldots,K_k$ konstant. Da die $K_2,\ldots,K_k$ zusammenhängen, hat $\tilde{\psi}$ dort überall den gleichen Wert c. Insbesondere gilt also, da $q_{12} \in K_2$, $q_{k1} \in K_k$ ist:

$$\tilde{\psi}(q_{12}) = \tilde{\psi}(q_{k1}) = c \qquad (16)$$

Dies ist aber unverträglich mit (14), da ja $\tilde{\psi}$ auf K_1 jeden Wert nur einmal annimmt. Also kann die Annahme nicht richtig sein; folglich ist K ein Baum.

Damit ist Satz 3.1 bewiesen, q.e.d.

§ 4. Hilfssätze aus der Matrizentheorie und Begriff des Schnittbetrages.

Sei X eine 2-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, $K \subset X$ sei eine 1-dimensionale, kompakte, exzeptionelle, analytische Menge in X. Die irreduziblen Komponenten von K seien mit K_ν ($\nu = 1 \ldots n$) bezeichnet. K habe die Eigenschaften von Satz 1.2. Sei weiter $(c_{\nu\mu})$ die Schnittmatrix von K. Nach [6] ist $(c_{\nu\mu})$ negativ definit. Folglich ist $(-c_{\nu\mu})$ positiv definit. Weiterhin ist $(-c_{\nu\mu})$ eine ganzzahlige, n-reihige, quadratische und symmetrische Matrix mit $-c_{\nu\mu} \leq 0$ für $\nu \neq \mu$ und $-c_{\nu\nu} > 0$. Ausserdem ist Det $(-c_{\nu\mu}) > 0$. Nach einem Satz der Matrizentheorie folgt (vgl. [6], § 4,8.e):

Es existiert ein ganzzahliger Vektor $(r_1, \ldots, r_n)$ mit $r_\mu > 0$ ($\mu = 1 \ldots n$), so dass gilt:

$$-\sum_{\mu=1}^{n} r_\mu \, c_{\nu\mu} > 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, n \qquad (1)$$

Wir behaupten:

Satz 4.1: Sämtliche adjungierten Unterdeterminanten (n-1)-ter Ordnung von Det $(-c_{\nu\mu})$ sind positiv.

Beweis: Für ein festes $m > \max_{\nu=1,..n} \{-c_{\nu\nu}\}$ wird gesetzt:

$$a_{\nu\nu} := m + c_{\nu\nu} \qquad \nu = 1, \ldots, n$$
$$a_{\nu\mu} := c_{\nu\mu} \qquad \nu \neq \mu$$

Die Matrix $(a_{\nu\mu})$ ist eine n-reihige quadratische Matrix mit nicht-negativen Elementen. Wir setzen:

$$A(m) := \text{Det} \; (-c_{\nu\mu})$$

In [13] wird gezeigt, dass alle adjungierten Unterdeterminanten (n-1)-ter Ordnung von A(m), die mit $A_{\nu\mu}(m)$ bezeichnet seien, nichtnegativ sind. (Für n=1 setzen wir $A_{11}(m) = 1$). Dabei ergibt sich für die $A_{\nu\mu}(m)$:

$$A_{\nu\mu}(m) = A(m) \left[\frac{\delta_{\nu\mu}}{m} + \frac{a_{\nu\mu}}{m^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{\nu i} \cdot a_{i\mu}}{m^3} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{\sum_{i_1,\ldots,i_{k-2}=1}^{n} a_{\nu i_1} \cdot a_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k-2}\mu}}{m^k} + \ldots \right] \qquad (2)$$

$$= A(m) \cdot L_{\nu\mu}$$

Es ist nach obigem $A(m) > 0$. Behauptung: Es ist $L_{\nu\mu} > 0$ für $\nu, \mu = 1,\ldots,n$. Klar ist: $L_{\nu\mu} \geq 0$ für $\nu,\mu = 1,\ldots,n$. Auch folgt für $\nu = \mu$ sofort: $L_{\nu\mu} > 0$. Sei jetzt $\nu \neq \mu$. Da K zusammenhängend ist, existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, und irreduzible Komponenten $K_{i_1}, \ldots, K_{i_{k-2}}$ von K, so dass für die Schnittzahlen gilt:

$$a_{\nu i_1} = a_{i_1 i_2} = \ldots = a_{i_{k-2}\mu} = 1$$

Es folgt, dass ein Summand der Gestalt $\frac{1}{m^k}$ in der Reihe $L_{\nu\mu}$ vorkommt. Also ist $A_{\nu\mu}(m) > 0$ für $\nu,\mu = 1,\ldots,n$. Die $A_{\nu\mu}(m)$ sind aber gerade die adjungierten Unterdeterminanten (n-1)-ter Ordnung von Det $(-c_{\nu\mu})$.

q.e.d.

Wir setzen der Abkürzung halber $d := \text{Det}(-c_{\nu\mu})$ und betrachten die Lösung $(r_1^{(\lambda)}, \ldots, r_n^{(\lambda)})$ des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} c_{11},\ldots,c_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ c_{n1},\ldots,c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1^{(\lambda)} \\ \vdots \\ r_n^{(\lambda)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -d \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = 1,\ldots,n$$

wobei -d an der λ-ten Stelle der Spalte rechts steht.

Nach der Cramer'schen Regel folgt:

$$r_\mu^{(\lambda)} = \frac{1}{\text{Det}\,(c_{\nu\mu})} \cdot \begin{vmatrix} c_{11}, \ldots, 0, \ldots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ & -d \\ \vdots & \vdots \\ c_{n1} \quad \ldots \quad 0 \quad \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} = A_{\lambda\mu}(m) \qquad (3)$$

Nach Satz 4.1 folgt: $r_\mu^{(\lambda)} > 0 \quad \forall \lambda, \mu$ und $r_\mu^{(\lambda)}$ ganzzahlig $\forall\ \lambda, \mu$. Wir haben also :

Satz 4.2: Der Vektor $(0, \ldots, -d, \ldots 0)$, wobei $-d$ an der λ-ten Stelle steht, ist vermöge der Transformation $(c_{\nu\mu})$ Bild eines positiv-ganzzahligen Vektors $(r_1^{(\lambda)}, \ldots, r_n^{(\lambda)})$ für $\lambda = 1, \ldots, n$.

Wir beweisen nun:

Satz 4.3: Es ist $d := \text{Det}\,(-c_{\nu\mu}) = 1$ genau dann, wenn es einen positiv ganzzähligen Vektor $(r_1^{(\lambda)}, \ldots, r_n^{(\lambda)})$, $\lambda = 1, \ldots, n$ gibt, so dass gilt:

$$\sum_{\mu=1}^{n} r_\mu^{(\lambda)} \cdot c_{\nu\mu} = -\delta_{\nu\lambda} \quad \text{für} \quad \nu, \lambda = 1, \ldots, n \qquad (4)$$

Beweis: 1) Ist $d = 1$, so folgt aus Satz 4.2 sofort die Behauptung.

2) Sei nun die Bedingung (4) erfüllt. Es folgt mit Hilfe von (3):

$$d \mid A_{\nu\mu}(m) \qquad \text{für} \quad \nu, \mu = 1, \ldots, n \qquad (5)$$

Nun ist

$$\text{Det}\left((-c_{\nu\mu})^{-1}\right) = \frac{1}{d} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}(m)}{d}, \ldots, & \frac{A_{n1}(m)}{d} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{A_{1n}(m)}{d}, \ldots, & \frac{A_{nn}(m)}{d} \end{vmatrix}$$

Wegen (5) folgt:

$$\frac{1}{d} \in \mathbb{Z} \qquad (6)$$

Wegen $d > 0$ folgt damit: $d = 1$, q.e.d.

Es sei jetzt $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}})$ die minimale Auflösung von $(Y, \mathcal{Y})$ und sei $\tilde{K} \subset \tilde{X}$ die Ausnahmemenge. Man erhält nun aus $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}})$ eine eindeutig bestimmte Auflösung $(X, \mathcal{H})$ mit den Eigenschaften von Satz 1.2 in folgender Weise:

Man setzt in die nicht gewöhnlichen Punkte von $\tilde{K}$, die keine bestimmten Doppelpunkte sind, Hopf'sche Sphären ein. Dadurch entsteht aus $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}})$ eine Auflösung $(\tilde{X}_1, \tilde{\mathcal{H}}_1)$ mit der Ausnahmemenge $\tilde{K}_1$. Man setzt nun wieder in die Singularitäten von $\tilde{K}_1$, die keine bestimmten Doppelpunkte sind, Hopf'sche Sphären ein und gelangt zu einer Auflösung $(\tilde{X}_2, \tilde{\mathcal{H}}_2)$. So fährt man fort, bis man nach endlich vielen Schritten zu einer Auflösung $(X, \mathcal{H})$ gelangt, die den Eigenschaften von Satz 1.2 genügt. Sei $K \subset X$ die Ausnahmemenge von $(X, \mathcal{H})$. K entsteht also aus $\tilde{K}$ durch σ -Prozesse, wobei keine Sphäre "zuviel" eingesetzt wird, d.h. das Verfahren wird abgebrochen, sowie die Eigenschaften von Satz 1.2 erfüllt sind. Da $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}})$ eindeutig bestimmt ist, ist dies auch $(X, \mathcal{H})$.

Def. 4.1: Auflösungen mit den Eigenschaften von Satz 1.2 sollen glatte Auflösungen heissen. Dabei gibt es nach Konstruktion eine eindeutig bestimmte minimale glatte Auflösung von $(Y, \mathcal{Y})$.

Eine beliebige glatte Auflösung $(X', \mathcal{H}')$ von $(Y, \mathcal{Y})$ erhält man nun aus der minimalen glatten Auflösung $(X, \mathcal{H})$ durch Einsetzen endlich vieler Hopf'scher Sphärenbäume in Punkten von K. Sei nun $(X', \mathcal{H}')$ eine beliebige glatte Auflösung von $(Y, \mathcal{Y})$, $K' \subset X'$ sei die Ausnahmemenge von $(X', \mathcal{H}')$ und sei $(c'_{\nu\mu})$ die Schnittmatrix von K'. Weiter sei $(c_{\nu\mu})$ die Schnittmatrix von K. Wir behaupten:

$$\text{Det}\,(c_{\nu\mu}) = \pm\, \text{Det}\,(c'_{\nu\mu}) \qquad (7)$$

Es genügt zu zeigen, dass sich die Determinante der Schnittmatrix durch Einsetzen einer Hopf'schen Sphäre σ in einem Punkte q von K bis auf das Vorzeichen nicht ändert. Dazu müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1.Fall: q ist nicht Schnittpunkt zweier irreduzibler Komponenten von K. Seien $K_1,\dots,K_n$ die irreduziblen Komponenten von K und sei $q \in K_\nu$. Da der Selbstschnitt von σ -1 ist, und da sich die Selbstschnittzahl von K_ν durch Anwendung eines einfachen σ - Prozesses in q um 1 verringert, und da ferner σ und K_ν sich in q transversal schneiden (vgl. [1o]), geht $(c_{\nu\mu})$ über in folgende Schnittmatrix $(c'_{\nu\mu})$:

$$(c_{\nu\mu}) = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & \overset{\nu}{\smile} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \cdots & & c_{\nu\nu} & & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & & c_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & \cdots & c_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & & c_{\nu\nu}-1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & \cdots & \cdots & c_{nn} & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots 0 & -1 \end{pmatrix} = (c'_{\nu\mu}) \qquad (8)$$

Durch Addition der letzten Spalte von $(c'_{\nu\mu})$ zur ν-ten Spalte und anschliessende Entwicklung nach der letzten Zeile ergibt sich sofort die Behauptung.

2. Fall: $q = q_{\nu\mu}$ ist Schnittpunkt zweier irreduzibler Komponenten K_ν, K_μ von K. Auf Grund derselben Überlegungen wie in Fall 1 und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass sich K_ν und K_μ nun nicht mehr schneiden (vgl. wieder [1o]), geht jetzt $(c_{\nu\mu})$ über in folgende Schnittmatrix $(c'_{\nu\mu})$:

(9)

$$(c_{\nu\mu}) = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1\nu} & \cdots & c_{1\mu} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{\nu 1} & \cdots & c_{\nu\nu} & \cdots & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{\mu 1} & \cdots & 1 & \cdots & c_{\mu\mu} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & c_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1\nu} & \cdots & c_{1\mu} & \cdots & c_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{\nu 1} & \cdots & c_{\nu\nu}-1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{\mu 1} & \cdots & 0 & \cdots & c_{\mu\mu}-1 & \cdots & 1 & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & c_{nn} & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} = (c'_{\nu\mu})$$

Durch Addition der letzten Spalte von $(c'_{\nu\mu})$ zur ν-ten und zur μ-ten Spalte und anschliessende Entwicklung nach der letzten Zeile ergibt sich wieder die Behauptung. damit haben wir :

Satz 4.4: Sei $(Y, \mathcal{Y})$ ein 2-dimensionaler normaler komplexer Raum, sei $p \in Y$ die einzige Singularität von Y. Die zu den glatten Auflösungen $(X, \mathcal{H})$ von $(Y, \mathcal{Y})$ gehörigen Schnittmatrizen haben bis auf das Vorzeichen alle die gleiche Determinante.

Def. 4.2: Wir können infolge von Satz 4.4 jeder 2-dimensionalen normalen Singularität p eine wohlbestimmte natürliche Zahl $\sigma(p)$ zuordnen, nämlich den Betrag der Determinante der Schnittmatrix der Ausnahmemenge K einer (beliebigen) glatten Auflösung $(X, \mathcal{H})$ von p. $\sigma(p)$ möge der Schnittbetrag der Singularität p heissen.

§ 5. Topologische Hilfssätze.

Wir schicken zunächst einen Hilfssatz voraus.

Sei X eine 2-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, $K \subset X$ sei eine exzeptionelle kompakte irreduzible 1-dimensionale analytische Menge in X vom Geschlecht Null. Die Selbstschnittzahl von K sei -k. Sei $x \in K$ ein Punkt. Wir bezeichnen mit $(K)^d$ die d-te Tensorpotenz des komplex-analytischen Geradenbündels über X, das zu dem holomorphen Divisor K gehört. Entsprechend sei $(x)^d$ die d-te Tensorpotenz des komplex-analytischen Geradenbündels über K, das zu dem holomorphen Divisor x gehört.

Hilfssatz: Es ist $(K)|K \cong (x)^{-k}$

Beweis: Wir wählen um den Punkt $x \in K$ und um einen anderen Punkt $y \in K$ zwei komplexe Koordinatensysteme $U_1 := (x;u,v)$, $U_2 := (y;\tilde{u},\tilde{v})$ derart, dass gilt:

$U_1 \cap K = \{(u,v) : u = o\}$, $U_2 \cap K = \{(\tilde{u},\tilde{v}) : \tilde{v} = o\}$.

Die Menge $U := U_1 \cup U_2$ ist eine Umgebung von K. Nach [6], § 4,8b folgt, dass durch die Selbstschnittzahl von K die komplexe Struktur einer Umgebung von K eindeutig bestimmt ist. Man rechnet leicht nach, dass in $U_1 \cap U_2$ die Koordinaten in folgender Weise verheftet sind:

$$\begin{cases} u = \tilde{u}^k \cdot \tilde{v} \\ v = \tilde{u}^{-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{u} = v^{-1} \\ \tilde{v} = u \cdot v^k \end{cases} \tag{1}$$

Sei die analytische Menge $\{v = o\}$ mit A bezeichnet. Wir betrachten nun die in ganz U holomorphe Funktion f, die in U_1 durch $u \cdot v^k$ und in U_2 durch $\tilde{v}$ gegeben ist. Der zu f gehörige holomorphe Divisor ist K + k A. Das zu diesem Divisor gehörige über U definierte Bündel $(K) \otimes (A)^k$ ist trivial. Also folgt:

$$(K) \quad \tilde{\cong} \quad (A)^{-k} \qquad (2)$$

Da A und K sich in x transversal schneiden, gilt: $(A)|K \cong (x)$. Damit folgt:

$$(K)|K \quad \tilde{\cong} \quad (x)^{-k}$$

q.e.d.

Es sei jetzt $(X, \mathcal{H})$ die minimale glatte Auflösung des 2-dimensionalen normalen komplexen Raumes $(Y, \mathcal{O})$, und sei $K = \bigcup_1^n K_\nu \subset X$ die Ausnahmemenge. Die Schnittpunkte von K_ν mit K_μ seien $q_{\nu\mu}$. K sei ein Sphärenbaum mit folgender Eigenschaft:

(*) Jede Sphäre K_ν möge von höchstens k_ν anderen Sphären von K geschnitten werden, wobei $-k_\nu$ die Selbstschnittzahl von K_ν sei.

Ferner sei $\mathcal{M}$ die Idealgarbe von K. Wir setzen $\mathcal{M}^0 := \mathcal{H}$ und betrachten die über K kohärenten analytischen Garben $\mathcal{M}^\ell/\mathcal{M}^{\ell+1}$ für $\ell = 0,1,2,\ldots$ (Für $\mathcal{M}^\ell/\mathcal{M}^{\ell+1}|K$ schreiben wir einfach nur $\mathcal{M}^\ell/\mathcal{M}^{\ell+1}$).

Satz 5.1: Es ist $H^1(K, \mathcal{M}^\ell/\mathcal{M}^{\ell+1}) = 0$ für $\ell = 0,1,2,\ldots$.

Beweis: Wir wählen für K eine Stein'sche Überdeckung in folgender Weise: Wir überdecken jede Sphäre K_ν mit zwei offenen Kugelkalotten $U_1^{(\nu)}$, $U_2^{(\nu)}$ derart, dass $U^{(\nu)} := U_1^{(\nu)} \cap U_2^{(\nu)} = U_1^{(\nu)} \cap U_2^{(\nu)}$ ein Kreisring auf K_ν ist und $U^{(\nu)}$ keinen der Schnittpunkte $q_{\nu\mu}$ enthält. Dies ist möglich, wie man sich sofort überlegt.

Für $\lambda = 1,2$ und $\nu = 1,\ldots,n$ wird jetzt der Menge $\{U_\lambda^{(\nu)}\}$ ein Graph Γ folgendermassen zugeordnet: Jedem $U_\lambda^{(\nu)}$ entspreche ein Punkt $P_\lambda^{(\nu)}$ von Γ, zwei Punkte werden genau dann durch eine Strecke verbunden, wenn die den $P_\lambda^{(\nu)}$ entsprechenden $U_\lambda^{(\nu)}$ in einem Schnittpunkt $q_{\nu\mu}$ zusammenhängen. Γ ist ein zyklenfreier Streckenkomplex, der aus endlich vielen (mindestens zwei) Zusammenhangskomponenten Γ_ϱ ($\varrho = 1,\ldots,r$) besteht. Es werden nun die Vereinigungsmengen

$U_\varrho := \bigcup U_\lambda^{(\nu)}$, $\varrho = 1,\ldots,r$ jeweils über diejenigen $U_\lambda^{(\nu)}$ gebildet, deren zugeordnete Punkte $P_\lambda^{(\nu)}$ in einer Zusammenhangskomponente von Γ liegen. Wie man sieht, bildet das System $\mathcal{U} := \{ U_\varrho , \varrho = 1,\ldots,r \}$ eine Stein'sche Überdeckung von K. Nach dem Leray'schen Theorem folgt:

$$H^1(K, \mathcal{M}^\ell/\mathcal{M}^{\ell+1}) \cong H^1(\mathcal{U}, \mathcal{M}^\ell/\mathcal{M}^{\ell+1}) \qquad (3)$$

Wir zeigen: $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{M}^\ell/\mathcal{M}^{\ell+1}) = 0$. Sei ξ ein 1-$\mathcal{U}$-Cozyklus. Wir zeigen, dass ξ ein 1-$\mathcal{U}$-Corand ist.

Vermöge ξ ist jedem Indexpaar ϱ,κ $[\varrho,\kappa = 1,\ldots,r]$ ein Schnitt $\bar{f}^{(\varrho,\kappa)} \in \Gamma(U_\varrho \cap U_\kappa , \mathcal{M}^\ell/\mathcal{M}^{\ell+1})$ zugeordnet. Ist $\varrho = \kappa$, bzw, ist $U_\varrho \cap U_\kappa = \emptyset$, so ist $\bar{f}^{(\varrho,\kappa)} \equiv 0$. Wir betrachten jetzt den Fall: $\varrho < \kappa$ und $U_{\varrho\kappa} := U_\varrho \cap U_\kappa \neq \emptyset$. Es ist dann $U_{\varrho\kappa} = U^{(\nu)}$ einer der oben konstruierten Kreisringe. Es gibt nun eine offene Überdeckung $\{ A_i^{(\varrho,\kappa)} \}$ von $U_{\varrho\kappa}$ und Schnittflächen $\tilde{f}_i^{(\varrho,\kappa)} \in \Gamma(A_i^{(\varrho,\kappa)}, \mathcal{M}^\ell)$, so dass gilt: $\tilde{f}_i^{(\varrho\kappa)}$ ist ein Repräsentant modulo $\mathcal{M}^{l+1}$ der Schnittfläche $\bar{f}^{(\varrho,\kappa)} \mid A_i^{(\varrho,\kappa)}$. Weiter existieren offene $B_i^{(\varrho,\kappa)} \subset X$ und in den $B_i^{(\varrho,\kappa)}$ holomorphe Funktionen $f_i^{(\varrho,\kappa)} \in \Gamma(B_i^{(\varrho,\kappa)} , \mathcal{M}^\ell)$ mit: $B_i^{(\varrho,\kappa)} \cap K = A_i^{(\varrho,\kappa)}$, $f_i^{(\varrho,\kappa)} \underset{\text{gew.}}{|} A_i^{(\varrho,\kappa)} = \tilde{f}_i^{(\varrho,\kappa)}$. Wir können die $B_i^{(\varrho,\kappa)}$ als Stein'sch annehmen. Es existieren dann auf dem $B_i^{(\varrho\kappa)}$ holomorphe Funktionen $h_i^{(\varrho\kappa)}$, die jeweils die Garbe $\mathcal{M}^\ell$ erzeugen. Dann folgt:

$$f_i^{(\varrho\kappa)} = d_i^{(\varrho,\kappa)} \; h_i^{(\varrho,\kappa)} \qquad (4)$$

wobei die $d_i^{(\varrho\kappa)} \in \Gamma(B_i^{(\varrho\kappa)}, \mathcal{H})$ sind. Die Verteilung $\{ (B_i^{(\varrho\kappa)}, h_i^{(\varrho\kappa)}) \}$ erzeugt das Bündel $\bigotimes_1^n (K_i)^1 \mid \bigcup_i B_i^{(\varrho,\kappa)}$. Wir setzen jetzt: $S_i^{(\varrho,\kappa)} := d_i^{(\varrho,\kappa)} \mid K$ und behaupten, dass das System $\{ (A_i^{(\varrho,\kappa)} , \mathfrak{S}_i^{(\varrho,\kappa)}) \}$ eine holomorphe Schnittfläche im Bündel $\bigotimes_1^n (K_i)^{-1} \mid U_{\varrho\kappa}$ darstellt: Nach Konstruktion gilt nämlich in $B_{ij}^{(\varrho,\kappa)} := B_i^{(\varrho\kappa)} \cap B_j^{(\varrho\kappa)}$:

$$f_i^{(\rho\kappa)} - f_j^{(\rho\kappa)} \in \Gamma(B_{ij}^{(\rho\kappa)}, \mathfrak{m}^{l+1}) \quad .$$

Wegen (4) gilt also:

$$d_i^{(\rho\kappa)} \cdot h_i^{(\rho\kappa)} - d_j^{(\rho\kappa)} \cdot h_j^{(\rho\kappa)} \in \Gamma(B_{ij}^{(\rho\kappa)}, \mathfrak{m}^{l+1})$$

Daraus ergibt sich durch Division von $h_i^{(\rho\kappa)}$:

$$d_i^{(\rho\kappa)} - d_j^{(\rho\kappa)} \cdot h_j^{(\rho\kappa)} \cdot h_i^{(\rho\kappa)-1} \in \Gamma(B_{ij}^{(\rho\kappa)}, \mathfrak{m})$$

Durch analytische Einschränkung auf K folgt:

$$S_i^{(\rho\kappa)} = (h_j^{(\rho\kappa)} h_i^{(\rho\kappa)} - 1) \mid K \cdot S_j^{(\rho\kappa)} \qquad (5)$$

Hieraus folgt das Behauptete. Wir nennen diese Schnittfläche $S^{(\rho,\kappa)}$. Sei $-k_\nu$ die Selbstschnittzahl von K_ν . Sei $x_\nu \in K_\nu$ ein Punkt mit $x_\nu \neq q_{\nu\mu}$ und $x_\nu \notin U_{\rho\kappa}$. Sei k'_ν die Anzahl der Sphären von K, die K_ν schneiden.
Nach Voraussetzung gilt: $\tilde{k}_\nu := k_\nu - k'_\nu \geq 0$. Man rechnet mit Hilfe des oben bewiesenen Hilfssatzes nach, dass gilt: $\bigotimes_1^n (K_i)^{-1} \mid K_\nu \cong (x_\nu)^{\tilde{k}_\nu \cdot 1}$. Wir können also $S^{(\rho,\kappa)}$ als holomorphe Schnittfläche in dem Geradenbündel $(x_\nu)^{\tilde{k}_\nu \cdot 1} \mid U_{\rho\kappa}$ auffassen.

Sei $\{(W_i^{(\rho\kappa)}, \varphi_i^{(\rho\kappa)})\}$ ein Divisor über K_ν , von dem das Bündel $(x_\nu)^{\tilde{k}_\nu \cdot 1}$ herkommt. Wegen $\tilde{k}_\nu \geq 0$ kann dieser Divisor natürlich holomorph gewählt werden. $S^{(\rho,\kappa)}$ kann dann aufgefasst werden als in den $W_i^{(\rho,\kappa)} \cap U_{\rho\kappa}$ holomorphe Funktionen $S_i^{(\rho\kappa)}$, für die in $W_i^{(\rho\kappa)} \cap W_j^{(\rho\kappa)} \cap U_{\rho\kappa}$ gilt:

$$S_i^{(\rho\kappa)} = \varphi_i^{(\rho\kappa)} \cdot \varphi_j^{(\rho\kappa)-1} \cdot S_j^{(\rho\kappa)} \qquad (6)$$

Wir bilden jetzt die in den $W_i^{(\rho\kappa)} \cap U_{\rho\kappa}$ holomorphen Funktionen $S_i^{(\rho\kappa)} \cdot \varphi_i^{(\rho\kappa)-1}$, die wegen (6) eine über ganz $U_{\rho\kappa}$ holomorphe Funktion $\psi^{(\rho\kappa)}$ bilden.

Nun nehmen wir eine Umbenennung der oben konstruierten

Kugelkalotten $U_\lambda^{(\nu)}$ vor: Jede dieser Kugelkalotten ist in genau einem $U_\varrho \in \mathcal{U}$ und in genau einem K_ν enthalten. Wir bezeichnen sie jetzt mit $U_\varrho^{(\nu)}$. Diese Indizierung ist eindeutig.

Die Funktion $\psi^{(\varrho\kappa)}$ besitzt in $U_{\varrho\kappa}$ eine Laurent-Entwicklung der Form:

$$\psi^{(\varrho\kappa)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n^{(\varrho\kappa)} \cdot (z - z_{\varrho\kappa})^n \tag{7}$$

Dabei ist $z_{\varrho\kappa}$ der Mittelpunkt des Kreises $U_\varrho^{(\nu)}$. Die Reihen:

$$\tilde{\psi}_\varrho^{(\nu)} := \sum_{0}^{\infty} a_n^{(\varrho\kappa)} (z - z_{\varrho\kappa})^n \qquad \text{bzw.}$$

$$\tilde{\psi}_\kappa^{(\nu)} := -\sum_{-\infty}^{-1} a_n^{(\varrho\kappa)} (z - z_{\varrho\kappa})^n$$

stellen in $U_\varrho^{(\nu)}$ bzw. in $U_\kappa^{(\nu)}$ holomorphe Funktionen dar, und es gilt in $U_{\varrho\kappa}$:

$$\tilde{\psi}_\varrho^{(\nu)} - \tilde{\psi}_\kappa^{(\nu)} = \psi^{(\varrho\kappa)} \tag{8}$$

Wie man sich leicht überlegt, lässt sich wegen der Zyklenfreiheit von K durch Addieren konstanter komplexer Zahlen zu den $\tilde{\psi}_\varrho^{(\nu)}$ erreichen, dass die neu entstehenden Funktionen $\psi_\varrho^{(\nu)}$, $\psi_\varrho^{(\mu)}$ in den Schnittpunkten $q_{\nu\mu}$ übereinstimmen und dass auch jetzt noch gilt:

$$\psi_\varrho^{(\nu)} - \psi_\kappa^{(\nu)} = \psi^{(\varrho\kappa)}, \quad \varrho < \kappa, \; U_{\varrho\kappa} \neq \emptyset, \quad \varrho, \kappa = 1, \ldots, r \tag{9}$$

Weiterhin können wir annehmen, dass die Verteilungen $\{(W_i^{(\varrho\kappa)}, \varphi_i^{(\varrho\kappa)})\}$ so geschickt gewählt sind, dass für die in Frage kommenden $\varphi_i^{(\varrho\kappa)}$ gilt: $\varphi_i^{(\varrho\kappa)}(q_{\nu\mu}) = 1$.

Wir bilden jetzt die in den $W_i^{(\varrho\kappa)} \cap U_\varrho^{(\nu)}$ bzw. $W_i^{(\varrho\kappa)} \cap U_\kappa^{(\nu)}$ holomorphen Funktionen $\psi_\varrho^{(\nu)} \cdot \varphi_i^{(\varrho\kappa)}$ bzw. $\psi_\kappa^{(\nu)} \cdot \varphi_i^{(\varrho\kappa)}$, die eine holomorphe Verteilung in den $U_\varrho^{(\nu)}$ bzw. $U_\kappa^{(\nu)}$ bilden. Diese Verteilung lässt sich als holomorphe Schnittfläche $S_\varrho^{(\nu)}$ bzw. $S_\kappa^{(\nu)}$ im Bündel $(x_\nu)^{\tilde{k}_\nu \cdot l} \mid U_\varrho^{(\nu)}$ bzw. $(x_\nu)^{\tilde{k}_\nu \cdot l} \mid U_\kappa^{(\nu)}$ und damit wegen des Hilfssatzes im Bündel $\bigotimes_1^n (K_i)^{-1} \mid U_\varrho^{(\nu)}$ bzw. $\bigotimes_1^n (K_i)^{-1} \mid U_\kappa^{(\nu)}$ auffassen. In $\bigotimes_1^n (K_i)^{-1} \mid U_{\varrho\kappa}$ gilt wegen (9):

$$S_\varrho^{(\nu)} - S_\kappa^{(\nu)} = S^{(\varrho\kappa)} \tag{10}$$

Laut Konstruktion treffen zwei Schnittflächen $S_\varrho^{(\nu)}$, $S_\varrho^{(\mu)}$ über einem Schnittpunkt $q_{\nu\mu}$ in dessen Faser den gleichen Punkt.

Anmerkung: Dazu muss gezeigt werden, dass gilt:

$\bigotimes_1^n (K_i)^{-1} \mid K \cong F_1 \otimes \ldots \otimes F_n$, wobei F_ν das Bündel über K ist, das aus $(x_\nu)^{\tilde{k}_\nu l}$ durch triviale Fortsetzung auf ganz K entsteht. Für $l = 0$ ist dies trivialerweise richtig; in diesem Falle lässt sich der Beweis von Satz 5.1 bis zu Ende durchführen und wir erhalten: $H^1(K, \mathcal{K}/\mathcal{M}) = 0$. Es folgt, dass wegen der Exaktheit der Sequenz

$$\ldots \to H^1(K, \mathcal{K}/\mathcal{M}) \to H^1(K, \mathcal{K}^*/\mathcal{M}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(K, \mathbb{Z}) \to \ldots$$

die Bündelklassen aus $H^1(K, \mathcal{K}^*/\mathcal{M}^*)$ durch ihre Chern'sche Klasse eindeutig bestimmt sind. Diese sind ganzzahlige n-Tupel, da $H^2(K, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_1^n \mathbb{Z}$. Durch komponentenweisen Vergleich von $\delta(\bigotimes_1^n (K_i)^{-1} \mid K)$ und $\delta(F_1 \otimes \ldots \otimes F_n)$ ergibt sich die Gleichheit der Chern'schen Klassen und damit die Isomorphie der beiden Bündel (vgl. dazu § 6, Formal (3), ff.).

Wir erhalten also auf diese Weise holomorphe Schnittflächen $S^{(\varrho)}$ in den Bündeln $\bigotimes_1^n (K_i)^{-1} \mid U_\varrho$, $\varrho = 1 \ldots r$. Für die $S^{(\varrho)}$ gilt:

$$S^{(\varrho)} \Big| \bigotimes_1^n (K_i)^{-1} \mid U_{\varrho\kappa} = S_\varrho^{(\nu)}$$

Es gibt nun eine offene Überdeckung $\{A_i^{(\varrho)}\}$ von U_ϱ und Funktionen $S_i^{(\varrho)} \in \Gamma(A_i^{(\varrho)}, \mathcal{H}/\mathcal{M})$ derart, dass das System $\{(A_i^{(\varrho)}, S_i^{(\varrho)})\}$ die Schnittfläche $S^{(\varrho)}$ über U_ϱ darstellt. Sind die $A_i^{(\varrho)}$ genügend klein gewählt, dann gibt es in X offene Mengen $B_i^{(\varrho)}$ und Funktionen $d_i^{(\varrho)} \in \Gamma(B_i^{(\varrho)}, \mathcal{H})$, so dass gilt: $A_i^{(\varrho)} = B_i^{(\varrho)} \mid K$, $S_i^{(\varrho)} = d_i^{(\varrho)} \mid K$.
Die $B_i^{(\varrho)}$ können Stein'sch vorausgesetzt werden. Es existieren nun Funktionen $h_i^{(\varrho)} \in \Gamma(B_i^{(\varrho)}, \mathcal{H})$, die jeweils die Garbe $\mathcal{M}^l$ erzeugen. Es folgt, dass das System $\{(B_i^{(\varrho)}, h_i^{(\varrho)})\}$ das Geradenbündel $\bigotimes_1^n (K_i)^1 \mid \bigcup_\lambda B_\lambda^{(\varrho)}$ erzeugt. Es gilt also in $A_i^{(\varrho)} \cap A_j^{(\varrho)} =: A_{ij}^{(\varrho)}$ folgende Beziehung:

$$S_i^{(\varrho)} \cdot S_j^{(\varrho)-1} = (h_j^{(\varrho)} h_i^{(\varrho)-1}) \mid K \qquad (11)$$

Wir setzen: $f_i^{(\varrho)} := d_i^{(\varrho)} \cdot h_i^{(\varrho)}$ und $\tilde{f}_i^{(\varrho)} := f_i^{(\varrho)} \mid K$.
Es ist also: $f_i^{(\varrho)} \in \Gamma(B_i^{(\varrho)}, \mathcal{M}^1)$ und $\tilde{f}_i^{(\varrho)} \in \Gamma_{\text{gem.}}(A_i^{(\varrho)}, \mathcal{M}^1)$.

Aus (11) folgt:

$$S_i^{(\varrho)} = (h_j^{(\varrho)} \cdot h_i^{(\varrho)-1}) \mid K \cdot S_j^{(\varrho)}$$

und

$$d_i^{(\varrho)} - h_j^{(\varrho)} h_i^{(\varrho)-1} d_j^{(\varrho)} \in \Gamma(B_{ij}^{(\varrho)}, \mathcal{M}),$$

wobei $B_{ij}^{(\varrho)} := B_i^{(\varrho)} \cap B_j^{(\varrho)}$ gesetzt ist. Hieraus ergibt sich:

$$d_i^{(\varrho)} \cdot h_i^{(\varrho)} - d_j^{(\varrho)} h_j^{(\varrho)} \in \Gamma(B_{ij}^{(\varrho)}, \mathcal{M}^{l+1})$$

also:

$$f_i^{(\varrho)} - f_j^{(\varrho)} \in \Gamma(B_{ij}^{(\varrho)}, \mathcal{M}^{l+1})$$

und:

$$\tilde{f}_i^{(\varrho)} - \tilde{f}_j^{(\varrho)} \in \Gamma(A_{ij}^{(\varrho)}, \mathcal{M}^{l+1})$$

folglich definiert das System $\{(A_i^{(\varrho)}, \tilde{f}_i^{(\varrho)})\}$ eine Schnittfläche $\bar{f}^{(\varrho)} \in \Gamma(U_\varrho, \mathcal{M}^{l+1}/\mathcal{M}^{l+1})$, für $\varrho = 1, \ldots, r$.

Es sei jetzt $\{\tilde{A}_i^{(\varrho\kappa)}\}$ eine offene Überdeckung von $U_{\varrho\kappa}$ und zwar eine gemeinsame Verfeinerung der beiden Überdeckungs-

systeme $\{A_i^{(\varrho)} \cap U_{\varrho\varkappa}\}$, $\{A_i^{(\varrho\varkappa)}\}$. Ferner sei das System $\{\tilde{B}_i^{(\varrho\varkappa)}\}$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\{B_i^{(\varrho)} \cap \bigcup_\lambda B_\lambda^{(\varrho\varkappa)}\}$ und $\{B_i^{(\varrho\varkappa)}\}$ und es gelte: $\tilde{A}_i^{(\varrho\varkappa)} = \tilde{B}_i^{(\varrho\varkappa)} | K$. Wir können weiterhin annehmen, dass die Verteilungsfunktionen $h_i^{(\varrho)}$, $h_i^{(\varrho\varkappa)}$ so geschickt gewählt sind, dass in den $\tilde{A}_i^{(\varrho\varkappa)}$ gilt:

$$h_i^{(\varrho)} \; h_i^{(\varrho\varkappa)-1} = h_i^{(\varkappa)} \; h_i^{(\varrho\varkappa)-1} = 1.$$

Wegen (1o) ergibt sich nun:

$$S_i^{(\varrho)} - S_i^{(\varkappa)} - S_i^{(\varrho\varkappa)} = 0 \in \Gamma(\tilde{A}_i^{(\varrho\varkappa)}, \mathcal{H}_m) \qquad (12)$$

oder wegen der oben gemachten Voraussetzung:

$$S_i^{(\varrho)} \cdot (h_i^{(\varrho)} \cdot h_i^{(\varrho\varkappa)-1}) \; | K - S_i^{(\varkappa)} (h_i^{(\varkappa)} h_i^{(\varrho\varkappa)-1}) | K - S_i^{(\varrho\varkappa)} =$$

$$= 0 \in \Gamma(\tilde{A}_i^{(\varrho\varkappa)}, \mathcal{H}_m)$$

also folgt:

$$d_i^{(\varrho)} \cdot h_i^{(\varrho)} \cdot h_i^{(\varrho\varkappa)-1} - d_i^{(\varkappa)} \cdot h_i^{(\varkappa)} h_i^{(\varrho\varkappa)-1} - d_i^{(\varrho\varkappa)} \in \Gamma(\tilde{B}_i^{(\varrho\varkappa)}, m)$$

und:

$$d_i^{(\varrho)} \; h_i^{(\varrho)} - d_i^{(\varkappa)} \; h_i^{(\varkappa)} - d_i^{(\varrho\varkappa)} \; h_i^{(\varrho\varkappa)} \in \Gamma(\tilde{B}_i^{(\varrho\varkappa)}, m^{l+1}).$$

oder:

$$f_i^{(\varrho)} - f_i^{(\varkappa)} - f_i^{(\varrho\varkappa)} \in \Gamma(\tilde{B}_i^{(\varrho\varkappa)}, m^{l+1})$$

also: $\tilde{f}_i^{(\varrho)} - \tilde{f}_i^{(\varkappa)} - \tilde{f}_i^{(\varrho\varkappa)} \in \Gamma(\tilde{A}_i^{(\varrho\varkappa)}, m^{l+1})$.

Das aber impliziert:

$$\bar{f}^{(\varrho)} - \bar{f}^{(\varkappa)} - \bar{f}^{(\varrho\varkappa)} = 0 \in \Gamma(U_{\varrho\varkappa}, \mathcal{m^l}/\mathcal{m^{l+1}}) \quad .$$

Also gilt in $U_{\varrho\varkappa}$:

$$\bar{f}^{(\varrho)} - \bar{f}^{(\varkappa)} = \bar{f}^{(\varrho\varkappa)} \qquad \varrho < \varkappa \;,\; U_{\varrho\varkappa} \neq \emptyset \qquad (13)$$
$$\varrho, \varkappa = 1 \ldots r$$

Durch die Zuordnung:

$$\varrho \rightarrow \bar{f}^{(\varrho)} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

wird eine Null - $\mathcal{U}$ - Cokette ξ definiert, für die wegen (13) gilt:

$$\zeta = \delta \xi \qquad (14)$$

Also ist ζ ein 1 - $\mathcal{U}$ - Corand und infolgedessen gilt $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{M}^{\ell+1}/\mathcal{M}^{\ell+1}) = 0$ für $\ell = 0,1,2,\ldots$.

Wegen (3) folgt damit die Behauptung des Satzes, q.e.d.

Anmerkung: Für $l = 0$ ist Satz 5.1 auch ohne die Voraussetzung (*) von Seite 23 richtig.

Wir betrachten jetzt die exakte Garbensequenz:

$$0 \to \mathcal{M}^{\ell}/\mathcal{M}^{\ell+1} \to \mathcal{H}/\mathcal{M}^{\ell+1} \to \mathcal{H}/\mathcal{M}^{\ell} \to 0$$

zu der die exakte Cohomologiesequenz:

$$\ldots \to H^1(K, \mathcal{M}^{\ell}/\mathcal{M}^{\ell+1}) \to H^1(K, \mathcal{H}/\mathcal{M}^{\ell+1}) \to H^1(K, \mathcal{H}/\mathcal{M}^{\ell}) \to \ldots$$

gehört. Mit Hilfe von Satz 5.1 folgt nun sofort durch Induktion

$$H^1(K, \mathcal{H}/\mathcal{M}^{\ell}) = 0 \quad \text{für } \ell = 0,1,2,\ldots \quad . \qquad (15)$$

Jetzt sei $V = V(K) \subset X$ eine streng pseudokonvexe Umgebung von K, so dass K maximale kompakte nirgends diskrete analytische Teilmenge in V ist. Aus [12], Theorem V, folgt:

$$H^q(V, \mathcal{H}/\mathcal{M}^{\ell}) \cong H^q(K, \mathcal{H}/\mathcal{M}^{\ell}) \quad \text{für } q > 0 \qquad (16)$$

Somit ergibt sich aus (15):

$$H^1(V, \mathcal{H}/\mathcal{M}^{\ell}) = 0 \qquad \text{für } \ell = 0,1,2,\ldots \qquad (17)$$

Auf Grund von [6], § 4, Satz 1, gilt nun folgendes:

Es gibt eine natürliche Zahl k, derart, dass $H^1(V, \mathcal{M}^k)$ durch die von $i : \mathcal{M}^k \to \mathcal{H}$ erzeugte Abbildung auf $0 \in H^1(V, \mathcal{H})$ abgebildet wird. (vgl. auch die Anmerkung zu diesem Satz [6], Seite 356). Wegen der Exaktheit der Sequenz:

$$\ldots \to H^1(V, \mathcal{M}^k) \to H^1(V, \mathcal{H}) \to H^1(V, \mathcal{H}/\mathcal{M}^{\ell}) \to \ldots$$

erhalten wir daher wegen (17):

$$H^1(V, \mathcal{H}) = 0 \qquad (18)$$

Wegen der Unabhängigkeit von der speziellen Auflösung (vgl. [2]) folgt also:

Satz 5.2: Sei $(X,\mathcal{H})$ eine 2-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, $K \subset X$ sei ein exzeptioneller Sphärenbaum und habe die Eigenschaften von Satz 1.2. Der zu K gehörige minimale glatte Baum erfüllt die Voraussetzung (*) von Seite 23. $V = V(K) \subset X$ sei eine streng pseudokonvexe Umgebung von K, so dass K maximale, kompakte, nirgends diskrete analytische Teilmenge in V ist. Dann folgt: $H^1(V,\mathcal{H}) = 0$.

Wegen [12], Theorem V gilt natürlich auch

$$H^1(K,\mathcal{H}) = 0 \qquad (19)$$

Mit $\mathcal{H}^*$ bezeichnen wir die multiplikative Garbe der Keime nirgends verschwindender holomorpher Funktionen über X. $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{H}^*$ sei die Untergarbe der Keime, die auf K identisch 1 sind.

Wir betrachten jetzt das folgende kommutative Diagramm von Garbensequenzen über K, in dem Spalten und Zeilen exakt sind:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & 0 & \xrightarrow{i} & \mathcal{M} & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{M}^* & \to & 0 \\
 & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i & & \\
0 & \to & \mathbb{Z} & \xrightarrow{i} & \mathcal{H} & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{H}^* & \to & 0 \\
 & & \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p & & \\
0 & \to & \mathbb{Z} & \xrightarrow{i} & \mathcal{H}/\mathcal{M} & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{H}^*/\mathcal{M}^* & \to & 0
\end{array}$$

Dabei bedeuten i bzw. p die natürlichen Injektionen bezw. Projektionen und "exp" bezeichne die Abbildung $f \to e^{2\pi i f}$.

Nach Satz 5.1 ist $H^1(K,\mathcal{H}/\mathcal{M}) = 0$. Damit erhalten wir wegen (19) aus obigem Diagramm folgendes kommutative und exakte Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & H^1(K,\mathcal{H}^*) & \longrightarrow & H^2(K,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow \psi & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^1(K,\mathcal{H}^*/\mathcal{M}^*) & \longrightarrow & H^2(K,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
\end{array}$$

Hieraus folgt, dass ψ injektiv ist. Damit ist bewiesen:

Satz 5.3: Sei $(X,\mathcal{H})$ eine 2-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, $K \subset X$ sei ein exzeptioneller Sphärenbaum und habe die Eigenschaften von Satz 1.2. Der zu K gehörige minimale glatte Baum erfüllt die Voraussetzung (*) von Seite 23. F sei ein komplex-analytisches Geradenbündel über einer Umgebung $U = U(K) \subset X$ mit der Eigenschaft, dass $F|K$ trivial ist. Dann existiert eine Umgebung $V = V(K) \subset U$, so dass $F|V$ trivial ist.

§ 6. Beweis des zweiten Teilergebnisses.

Satz 6.1: Sei $p \in Y$ eine 2-dimensionale normale Singularität mit folgenden Eigenschaften:

(i) Die Ausnahmemenge K einer Auflösung $(X,\mathcal{H})$ von p sei ein Sphärenbaum.

(ii) Für die minimale glatte Auflösung von p gelte die Bedingung (*) von Seite 23.
Dann folgt: $\mathcal{O}_p$ ist präfaktoriell.

Beweis: Sei $(X',\mathcal{H}')$ eine glatte Auflösung von $(Y,\mathcal{O})$ und sei $K' \subset X'$ die Ausnahmemenge. Ferner sei A' eine 1-dimensionale in einer Umgebung U'(K) irreduzible analytische Menge, die K' in genau einem Punkte x_o' schneidet und dort einen analytischen Primkeim erzeugt. In [9], Seite 11, wird gezeigt:

In x_o' lässt sich ein Hopf'scher Sphärenbaum $t^{-1}(x_o')$ so einsetzen, dass $A := t^{-1}(A')$ in $U := t^{-1}(U')$ nur aus gewöhnlichen Punkten und bestimmten Doppelpunkten besteht. - Wir erhalten also durch die Modifikation t^{-1} aus $(X',\mathcal{H}')$ eine Auflösung $(X,\mathcal{H})$ von $(Y,\mathcal{O})$. Sei $K := t^{-1}(K')$, und seien K_ν $(\nu = 1,\ldots,n)$ die irreduziblen Komponenten

von K. Nach Voraussetzung ist K ein Sphärenbaum, der den Voraussetzungen von Satz 1.2 genügt. A ist jetzt eine gewöhnliche, 1-dimensionale, in U analytische Menge, welche K transversal in genau einem Punkte x_0 schneidet, wobei x_0 nicht Schnittpunkt zweier irreduzibler Komponenten von K ist. Wegen Satz 2.2 ist Satz 6.1 bewiesen, wenn gezeigt wird, dass eine Umgebung $V = V(K) \subset X$ existiert und eine in V holomorphe Funktion f, welche genau auf $(K \cup A) \cap V$ verschwindet, denn vermöge t entspricht f eine in $V' := t(V)$ holomorphe Funktion f', die genau auf $(K' \cup A') \cap V'$ verschwindet.

Sei $(c_{\nu\mu})$ die Schnittmatrix von K, sei $d := |\mathrm{Det}(c_{\nu\mu})|$, und sei K_λ diejenige irreduzible Komponente von K, die von A geschnitten wird. Mit r_μ $(\mu = 1,\ldots,n)$ bezeichnen wir die adjungierten Unterdeterminanten (n-1) - ter Ordnung von Det $(-c_{\nu\mu})$, die wegen Satz 4.1 alle positiv und ganzzahlig sind. (In § 4 waren diese mit $A_{\lambda\mu}(m)$ bezeichnet).

(Anmerkung: Da λ in den folgenden Betrachtungen fest ist, lassen wir den Index λ bei den r_μ fort.)

Ist $n = 1$, so wird $r_1 = 1$ gesetzt.

$U = U(K)$ sei eine (hinreichend kleine) Umgebung von K. Wir betrachten den über U holomorphen Divisor

$$\vartheta := r_1 K_1 + \ldots + r_n K_n + d\,A \qquad (1)$$

und das von ϑ herkommende komplex-analytische Geradenbündel $\tilde{F}$ über U. Satz 6.1 ist bewiesen, wenn gezeigt wird, dass $F := \tilde{F}|K$ trivial ist, denn dann folgt aus Satz 5.3, dass $\tilde{F}$ bereits in einer ganzen Umgebung V(K) trivial ist; $\vartheta|V$ tritt dann als Divisor einer in ganz V holomorphen Funktion f auf, die die verlangten Eigenschaften hat.

Wir betrachten die exakte Sequenz von Garben über K:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{H}_m \xrightarrow{\exp} \mathcal{H}^*_m \to 0$$

zu der die exakte Comologiesequenz:

$$\ldots \to H^1(K, \mathcal{H}_m) \to H^1(K, \mathcal{H}^*_{m^*}) \xrightarrow{\delta} H^2(K, \mathbb{Z}) \to \ldots \qquad (2)$$

gehört. Das Bündel F repräsentiert ein Element $\check{F} \in H^1(K, \mathcal{H}^*_{m^*})$, dem durch den Homomorphismus δ ein Element $\delta(\check{F}) =: c \in H^2(K, \mathbb{Z})$, die sogenannte Chern'sche Klasse von F, zugeordnet ist. Da nach Satz 5.1 $H^1(K, \mathcal{H}_m) = 0$ ist, ist δ injektiv. Ist daher $c = 0$, so fällt F in die Isomorphieklasse des trivialen Bündels. Satz 6.1 ist also bewiesen, wenn gezeigt werden kann: $\delta(\check{F}) = c = 0$.

Mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Cohomologiesequenz ergibt sich:

$$H^2(K, \mathbb{Z}) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{\text{n-mal}} \qquad (3)$$

Die Chern'sche Klasse c ist also ein ganzzahliges n-Tupel. Man überlegt sich sofort, dass die ν-te Komponente von c gerade die Chern'sche Klasse des Bündels $F|K_\nu$ ist. Sei diese Chern'sche Klasse mit $\delta_\nu(F|K_\nu)$ bezeichnet. Es braucht also nur noch gezeigt werden, dass gilt:

$$\delta_\nu(F|K_\nu) = 0 \qquad \text{für } \nu = 1, \ldots, n.$$

Es gilt nun bekanntlich der Satz (vgl. z.B. [5], Vortr. XI):

Es sei ϑ ein Divisor auf der n-dimensionalen kompakten komplexen Mannigfaltigkeit M und G das zu ϑ gehörige komplex-analytische Geradenbündel. Das Null- und Polstellengebilde von ϑ, versehen mit seinen Ordnungen, repräsentiert einen 2n - 2 dimensionalen Zyklus ξ auf M. Der Homologieklasse von ξ in $H_{2n-2}(M, \mathbb{Z})$ entspricht im Poincaré'schen Isomorphismus $\varphi: H_{2n-2}(M, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathbb{Z})$ die Chern'sche Klasse von G.

Wegen (1) gilt:

$$\tilde{F} \cong (K_1)^{r_1} \otimes \ldots \otimes (K_n)^{r_n} \otimes (A)^d$$

Daraus folgt:

$$F|K_\nu \cong \left[(K_1)|K_\nu\right]^{r_1} \otimes \ldots \otimes \left[(K_n)|K_\nu\right]^{r_n} \otimes \left[(A)|K_\nu\right]^{d} \quad , \qquad \nu = 1,\ldots,n \qquad (5)$$

Wir bestimmen nun die Chern'schen Klassen $\delta_\nu\left[(K_\mu)|K_\nu\right]$, $\delta_\nu\left[(A)|K_\nu\right]$ und unterscheiden folgende Fälle:

a) Ist $\mu \neq \nu$ und schneiden sich K_μ und K_ν nicht, dann ist das Bündel $(K_\mu)|K_\nu$ trivial, also $\delta_\nu\left[(K_\mu)|K_\nu\right] = 0$.

b) Ist $\mu \neq \nu$ und schneiden sich K_μ und K_ν in einem Punkte $q_{\nu\mu}$, dann gilt trivialerweise:
$(K_\mu)|K_\nu \cong (q_{\nu\mu})^{c_{\nu\mu}}$. (Anmerkung: Da sich K_μ und K_ν in unserem Falle transversal schneiden, ist $c_{\nu\mu} = 1$).
Fassen wir $q_{\nu\mu} \in K_\nu$ als topologischen Nullzyklus auf, dann repräsentiert $q_{\nu\mu}$ das Element $1 \in H_0(K_\nu, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Es ergibt sich also mit Hilfe des eben angegebenen Satzes, dass die Chern'sche Klasse des Bündels $(q_{\nu\mu})$ eins ist. Also gilt:
$\delta_\nu\left[(K_\mu)|K_\nu\right] = c_{\nu\mu}$.

c) Ist $\mu = \nu$, so ergibt sich nach dem Hilfssatz von § 5:
$(K_\nu)|K_\nu \cong (x_\nu)^{c_{\nu\nu}}$ für einen beliebigen Punkt $x_\nu \in K_\nu$.
Es folgt wieder aus dem oben angegebenen Satz:
$\delta_\nu\left[(K_\nu)|K_\nu\right] = c_{\nu\nu}$.
Anmerkung: Diese Formel ist auch richtig für Flächen K_ν höheren Geschlechts, wie man leicht ausrechnet.

d) Ist $\nu \neq \lambda$, so schneiden sich A und K_ν nicht; also ist das Bündel $(A)|K_\nu$ trivial und daher $\delta_\nu\left[(A)|K_\nu\right] = 0$.

e) Ist $\nu = \lambda$, so schneiden sich A und K_ν in x_0 transversal, also gilt:
$(A)|K_\nu \cong (x_0)$ und daher wieder wegen des obigen Satzes:
$\delta_\nu\left[(A)|K_\nu\right] = 1$.

Aus Formel (5) und aus a) - e) erhalten wir:

$$\delta_\nu(F \mid K_\nu) = \begin{cases} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\nu\mu} r_\mu & \text{für } \nu \neq \lambda \\ \sum_{\mu=1}^{n} c_{\nu\mu} r_\mu + d & \text{für } \nu = \lambda \end{cases} \qquad (6)$$

Wegen Satz 4.2 sind diese Zahlen aber alle Null für $\nu = 1,\ldots,n$. Damit ist Satz 6.1 bewiesen. q.e.d.

§ 7. Beweis des Hauptsatzes.

Wir beweisen:

Satz 7.1: Sei $(Y, \mathcal{S})$ ein 2-dimensionaler normaler komplexer Raum und sei $p \in Y$ der einzige nicht gewöhnliche Punkt von Y. p ist genau dann rationale Singularität, wenn $\mathcal{S}_p$ präfaktoriell ist.

Beweis: Sei zunächst p rational. Sei $(X, \mathcal{H})$ eine glatte Auflösung von p mit der Ausnahmemenge $K = \bigcup_1^n K_\nu$. Nach Def. 1.2 gilt: $H^1(K, \mathcal{H}) = 0$. Wie im Beweis von Satz 5.3 erhalten wir folgendes kommutative und exakte Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1(K, \mathcal{H}^*) & \longrightarrow & H^2(K, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^1(K, \mathcal{H}^*/\mathcal{H}^*) & \xrightarrow{\delta} & H^2(K, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Es folgt, dass ψ und $\delta \mid \psi\,[H^1(K, \mathcal{H}^*)]$ injektiv sind. Durch das gleiche Verfahren, wie im Beweis von Satz 6.1,

ergibt sich, dass γ_p präfaktoriell ist.

Sei umgekehrt γ_p präfaktoriell. Nach Satz 3.1 folgt, dass K ein Sphärenbaum ist, und daraus ergibt sich nach Satz 5.1 und der Anmerkung:

$$H^1(K, \mathcal{H}_{\mathcal{M}}) = 0 \qquad (1)$$

Wir erhalten wieder folgendes kommutative und exakte Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1(K,\mathcal{H}) & \longrightarrow & H^1(K,\mathcal{H}^*) & \xrightarrow{\delta} & H^2(K,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow\psi & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^1(K,\mathcal{H}^*_{\mathcal{M}^*}) & \longrightarrow & H^2(K,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & 0 & & \end{array}$$

Man sieht sofort: $H^1(K,\mathcal{H}) = 0$ d.u.n.d., wenn ψ injektiv ist. Satz 7.1 ist also bewiesen, wenn gezeigt wird: $\operatorname{Ker}\psi = 0$. Sei mit ϕ die Projektion: $(X,\mathcal{H}) \to (Y,\mathcal{O})$ bezeichnet: In [15], Seite 14 wird bewiesen:

$$\operatorname{Pic}(K) \cong (R^1\phi)(\mathcal{H}^*)_p \qquad (2)$$

Dabei ist $(R^1\phi)(\mathcal{H}^*)_p$ der Halm des ersten direkten Bildes (bezüglich ϕ) der Garbe $\mathcal{H}^*$ im Punkte p. Pic (K) ist die Gruppe der Keime meromorpher Divisorenklassen in Umgebungen von K. Aus den Eigenschaften von ϕ folgt leicht:

$$(R^1\phi)(\mathcal{H}^*)_p \cong H^1(K,\mathcal{H}^*) \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) ergibt sich:

$$\operatorname{Pic}(K) \cong H^1(K,\mathcal{H}^*) \qquad (4)$$

Es folgt also, dass jedes Element $\check{F} \in H^1(K,\mathcal{H}^*)$ einen Repräsentanten F besitzt, der von einem meromorphen Divisor (in einer geeigneten Umgebung V = V(K)) herkommt. Da γ_p

präfaktoriell ist, überlegt man sich sofort, dass F sogar von einem holomorphen Divisor ϑ herkommt, der jede Sphäre K_ν ($\nu = 1,\dots,n$) als Nullstellenfläche besitzt. Es sei jetzt $\check{F} \in \operatorname{Ker} \gamma$ und F ein Repräsentant von $\check{F}$. F ist ein über einer Umgebung V = V(K) definiertes komplex-analytisches Geradenbündel, dessen Einschränkung auf K analytisch trivial ist. Wir haben zu zeigen, dass eine Umgebung W = W(K) $\subset$ V existiert, so dass F|W trivial ist. Das zu ϑ gehörige Nullstellengebilde besteht aus dem Baum $K = \bigcup_1^n K_\nu$ sowie aus 1-dimensionalen irreduziblen in V analytischen Mengen $A_\nu^{(i)}$, welche die K_ν schneiden ($\nu = 1,\dots,n$, $i = 1,\dots,k_\nu$). Sei $(c_{\nu\mu})$ die Schnittmatrix von K und sei $S_\nu^{(i)}$ die Schnittzahl von $A_\nu^{(i)}$ mit K_ν. Die Vielfachheiten, von denen die K_ν bzw. die $A_\nu^{(i)}$ auftreten, seien $r_\nu > 0$ bzw. $d_\nu^{(i)} > 0$. Wir drücken dies aus in der Form:

$$F: (r_1,\dots,r_n;\ d_1^{(1)} \dots d_1^{(k_1)},\dots,\ d_n^{(1)} \dots d_n^{(k_n)};\ ) \qquad (5)$$

Anmerkung: Verläuft ein $A_\nu^{(i)}$ durch den Schnittpunkt zweier Sphären K_ν, K_μ, so ist dessen Vielfachheit in (5) zweimal aufgeführt. Da F|K trivial ist, folgt:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k_1} S_1^{(i)} \cdot d_1^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i=1}^{k_n} S_n^{(i)} \cdot d_n^{(i)} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Da γ_p präfaktoriell ist, existieren zu jedem $A_\nu^{(i)}$ positive Zahlen ${}_1t_\nu^{(i)} \dots {}_nt_\nu^{(i)}$; $b_\nu^{(i)}$ und eine in einer Umgebung W = W(K) $\subset$ V holomorphe Funktion $f_\nu^{(i)}$, die genau auf $K \cup A_\nu^{(i)}$ von den erwähnten Ordnungen verschwindet.
Anmerkung: Geht ein $A_\nu^{(i)}$ durch zwei Sphären, so wird dieses nur einmal gezählt.

Da das Bündel $(f_\nu^{(i)})$ trivial in W ist, ist auch $(f_\nu^{(i)}) \mid K$ trivial. Also gilt:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}_1t_\nu^{(i)} \\ \vdots \\ {}_nt_\nu^{(i)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ S_\nu^{(i)} \cdot b_\nu^{(i)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \nu \qquad (7)$$

Anmerkung: Schneidet $A_\nu^{(i)}$ zwei Sphären K_ν, K_μ, so tritt auch noch an der μ-ten Stelle der Spalte rechts ein Glied $S_\mu^{(j)} \cdot b_\mu^{(j)}$ auf.

Wir setzen jetzt: $b := \prod_{\substack{\nu=1..n \\ i=1..k_\nu}} b_\nu^{(i)}$, $\tilde{b}_\nu^{(i)} := b/b_\nu^{(i)}$, $a_\nu^{(i)} := d_\nu^{(i)} \cdot \tilde{b}_\nu^{(i)}$

Hieraus ergibt sich zunächst:

$$a_\nu^{(i)} \cdot b_\nu^{(i)} = b \cdot d_\nu^{(i)} \qquad (8)$$

Aus (6) folgt:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \cdot r_1 \\ \vdots \\ b \cdot r_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k_1} S_1^{(i)} \cdot b \cdot d_1^{(i)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k_n} S_n^{(i)} \cdot b \cdot d_n^{(i)} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Aus (7) ergibt sich durch Multiplikation und Summation:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{\substack{i=1,..k'_\nu \\ \nu=1,..n}} a_\nu^{(i)} \cdot {}_1t_\nu^{(i)} \\ \vdots \\ \sum_{\substack{i=1..k'_\nu \\ \nu=1..n}} a_\nu^{(i)} \cdot {}_nt_\nu^{(i)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k_1} S_1^{(i)} \cdot b \cdot d_1^{(i)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k_n} S_n^{(i)} \cdot b \cdot d_n^{(i)} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Vergleich von (9) und (1o) ergibt:

$$b \cdot r_\mu = \sum_{\substack{i=1\ldots k'_\nu \\ \nu=1\ldots n}} a_\nu^{(i)} \cdot {}_\mu t_\nu^{(i)} \qquad \mu = 1 \ldots n \qquad (11)$$

Wir bilden jetzt folgendes Bündel über W:

$$G := (f_1^{(1)})^{a_1^{(1)}} \otimes \ldots \otimes (f_1^{(k'_1)})^{a_1^{(k'_1)}} \otimes \ldots \otimes (f_n^{(1)})^{a_n^{(1)}} \otimes \ldots \otimes (f_n^{(k'_n)})^{a_n^{(k'_n)}}$$

G ist natürlich analytisch trivial über W.

Mit Hilfe von (8) und (11) folgt nun durch Vergleich der Vielfachheiten der irreduziblen analytischen Mengen K_ν bzw. $A_\nu^{(i)}$:

$$G \cong F^b \qquad (12)$$

Also ist das Bündel F^b analytisch trivial über W. Da $H^1(K, \mathcal{H}^*) \cong H^1(K, \mathcal{H}) \circledast \operatorname{Im} \delta$ keine Torsionselemente besitzt, folgt, dass F über W analytisch trivial ist. Also ist $\operatorname{Ker} \psi = 0$ und daher $H^1(K, \mathcal{H}) = 0$. q.e.d.

§ 8. Gesamtergebnis .

Zum Schluss soll noch untersucht werden, wann der lokale Ring $\mathcal{O}_p$ faktoriell ist.

Wir setzen zunächst voraus, dass $\mathcal{O}_p$ faktoriell sei. Dann folgt natürlich nach Satz 7.1, dass p rational ist. Ist also $(X, \mathcal{H})$ eine beliebige glatte Auflösung von $(Y, \mathcal{O})$, $K \subset X$ die Ausnahmemenge, dann haben alle irreduziblen Komponenten K_λ , $\lambda = 1,\ldots, n$ das Geschlecht Null. Nach Satz 2.2, (ii) und der Anmerkung können wir nun zu jedem λ ($\lambda = 1,\ldots,n$) eine Umgebung $V_\lambda = V_\lambda(K)$ finden und eine 1-dimensionale gewöhnliche in V_λ analytische Menge A_λ , die K_λ in genau einem Punkte transversal schneidet und sonst keines der übrigen K_ν trifft, und eine in V_λ holomorphe Funktion f_λ , die genau auf $(K \cup A_\lambda) \cap V_\lambda$ verschwindet und auf A_λ von 1. Ordnung verschwindet. Seien $r_1^{(\lambda)},\ldots, r_n^{(\lambda)}$ die Ordnungen, von denen f_λ auf $K_1,\ldots,K_n$ verschwindet. Die Schnittmatrix von K sei $(c_{\nu\mu})$. Da die f_λ auf den V_λ triviale Geradenbündel erzeugen, folgt (vgl. den Beweis von Satz 6.1, Formel (6)):

$$\sum_{\mu=1}^{n} r_\mu^{(\lambda)} \cdot c_{\nu\mu} = -\delta_{\nu\lambda} \qquad \nu = 1,\ldots,n \; ; \; \lambda = 1 \ldots n \quad (1)$$

Also ist die Voraussetzung von Satz 4.3 erfüllt, und es folgt: Det $(c_{\nu\mu}) = \pm 1$; also gilt für den Schnittbetrag von p : $\sigma(p) = 1$.

Umgekehrt sei jetzt p rational und gelte $\sigma(p) = 1$. Wir verfahren jetzt genau so, wie im Beweis von Satz 6.1. bzw. wie im Beweis des ersten Teiles von Satz 7.1. Dabei ist nach der jetzt gemachten Voraussetzung d = 1, also verschwindet die im Beweise konstruierte holomorphe Funktion f auf A von 1. Ordnung. Daraus folgt nach Satz 2.2 und der Anmerkung, dass $\mathcal{O}_p$ faktoriell ist.

Wir haben also insgesamt als Ergebnis:

Satz 8.1: Sei $(Y, \mathcal{O})$ ein 2-dimensionaler normaler komplexer Raum mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}$ und sei $p \in Y$ ein nichtgewöhnlicher Punkt von Y. Dann gilt:

1. Der lokale Ring $\mathcal{O}_p$ ist genau dann präfaktoriell, wenn p rationale Singularität ist.
2. Der lokale Ring $\mathcal{O}_p$ ist genau dann faktoriell, wenn p rationale Singularität ist, und wenn ausserdem für den Schnittbetrag von p gilt: $\sigma(p) = 1$.
3. Ist $\mathcal{O}_p$ präfaktoriell, $(X, \mathcal{H})$ eine Auflösung von p und $K \subset X$ die Ausnahmemenge, dann ist K ein Sphärenbaum.
4. Ist $(X, \mathcal{H})$ die minimale glatte Auflösung von p, und ist die Ausnahmemenge K ein Sphärenbaum mit der Eigenschaft (*) von Seite 23, dann ist $\mathcal{O}_p$ präfaktoriell.

Literaturverzeichnis

[1] Abhyankar, S: Conceps of order and rank on a complex space, and a condition for normality. Math.Ann. 141, p.171 - 192 (1960)

[2] Artin, M: On isolated rational singularities of surfaces. Am. Journ.Math.88, p. 129 - 136 (1966)

[3] Behnke, H. und K. Stein: Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. 124, p. 1 - 16 (1951)

[4] Brieskorn,E.: Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen. Math.Ann. 166, p. 76 - 102 (1966)

[5] Grauert, H: Colloquium über Kähler'sche Mannigfaltigkeiten. Göttingen 1960.

[6] Grauert, H.: Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Ann. 146, p. 331 - 368 (1962)

[7] Gunning-Rossi: Analytic Functions of several complex variables. Prentice-Hall, 1965.

[8] Hirzebruch, F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Springer - Verlag 1962.

[9] Hirzebruch,F.: Über vierdimensionale Riemann'sche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Ann. 126. p. 1 - 22 (1953)

[10] Hopf,H.: Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen vierdimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten. Comm. Math.Helv. 29, p. 132 - 156 (1955)

[11] Koestner, A.: Normale algebroide Ringe der Dimension zwei.
Dissertation, Münster 1965.

[12] Narasimhan,R.: The Levi Problem for Complex Spaces II.
Math. Ann. 146, p. 195 - 216 (1962)

[13] Ostrowski, A.: Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale und absolute Konvergenz von linearen I terationsprozessen.
Comm. Math. Helv. 3o, p. 175 - 21o, (1955)

[14] Scheja, G.: Über Primfaktorzerlegung in 2-dimensionalen lokalen Ringen.
Math. Ann. 159, p. 252 - 258 (1965)

[15] Mumford, D.: The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity.
Inst. des Hautes Etudes Scientifiques, Publ. Math. Nr. 9 (1961).

Lebenslauf .

Am 9.6.1933 wurde ich als Sohn des Gutsbesitzers Karl Graf Finck v. Finckenstein und seiner Ehefrau Ursula, geb. Gräfin Behr-Negendank in Semlow (Vorpommern) geboren. Bis 1945 verbrachte ich meine Kindheit auf dem Waldgut meines Vaters im Kreise Königsberg/Neumark. Nach dem Kriege zogen wir in den Kreis Norden /Ostfriesland, wo meine Eltern heute noch leben.

Den ersten Schulunterricht erhielt ich in Form von Privatunterricht. Von 1946 - 1950 besuchte ich die Mittelschule in Norden und von 1950 - 1952 das staatl. Gymnasium in Oldenburg i.O., wo ich 1952 das Zeugnis der Reife erhielt.

Meiner Schulzeit schlossen sich 7 Jahre landwirtschaftlicher Praxis an.

Im Sommersemester 1959 begann ich das Studium der Mathematik an der Universität Göttingen, wo ich bis jetzt ununterbrochen immatrikuliert war. Seit 1962 beschäftigte ich mich bei den Herren Professoren Grauert und Remmert vorwiegend mit komplexer Analysis und schloss im November 1965 das Studium mit dem Diplomexamen in Mathematik in Göttingen ab.

Bönecke-Druck 3392 Clausthal-Z. 29